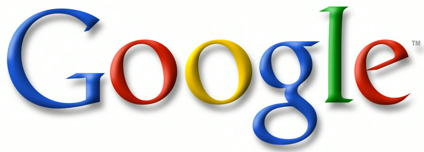
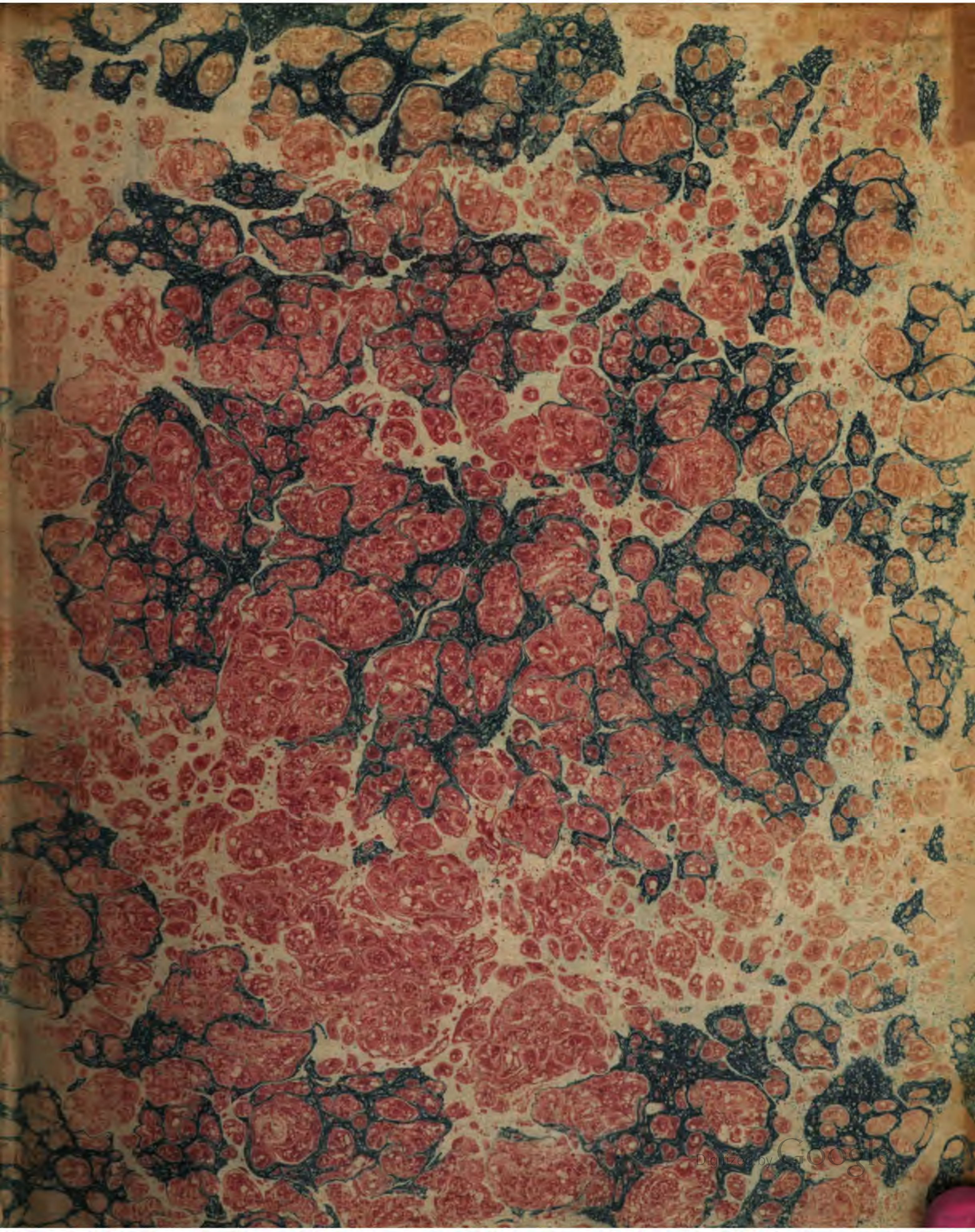






ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On pent adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 252, à Montpellier [Hérault];

A M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et les ouvrages à annoncer doivent être envoyés, francs de port, à la première de ces adresses.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche I.	Après la page	172.
II.		264.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME SEIZIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55.

1825 ET 1826.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

Recherches d'Analise sur les surfaces caustiques;

Par M. GERGONNE.

DANS un article inséré à la page 354 du précédent volume, nous avons démontré, d'après les idées que nous avait suggéré un travail de M. Quetelet, quelques propriétés générales des caustiques planes; et nous avons promis de montrer, dans un autre article, par des applications variées, combien la connaissance de ces propriétés pouvait faciliter la recherche de ces sortes de courbes. Mais il nous a paru qu'avant de remplir cet engagement, il convenait d'abord de compléter la théorie, en démontrant, pour les surfaces caustiques, des théorèmes analogues à ceux qu'offrent les caustiques planes; et tel est l'objet unique de l'article que l'on va lire.

Mais, auparavant nous rappellerons brièvement quelques principes déjà connus, mais qu'on ne trouve développés que dans quel-



ques ouvrages que le lecteur pourrait n'avoir pas sous la main.

Soit l'équation

$$F(x, y, z, a)=V=0 ,$$

dans laquelle a représente un paramètre indéterminé. A raison de la variabilité de ce paramètre, cette équation exprime une infinité de surfaces courbes, se succédant sans interruption dans l'espace, et pouvant conséquemment être touchées toutes par une même surface, lieu de leurs intersections consécutives, lesquelles sont en même temps leur lignes de contact avec cette surface qui en est dite l'*enveloppe*. On sait (*) que, pour obtenir l'équation de cette enveloppe, il n'est question que d'éliminer a entre les deux équations

$$V=0 , \quad \left(\frac{dV}{da}\right)=0 .$$

Si au lieu d'un paramètre unique, on en avait plusieurs a, b, c, ... au nombre de n, liés entre eux par $n-1$ équations de relation; on considérerait tous ces paramètres, excepté a, comme des fonctions de celui-ci, données par ces équations. En y joignant l'équation $V=0$, on se trouverait avoir n équations; en les différentiant toutes par rapport à a et à ses fonctions, on obtiendrait n nouvelles équations; et tout se réduirait à éliminer, entre les $2n$ équations, les n paramètres a, b, c, d, ... et les $n-1$ rapports $\frac{db}{da}$, $\frac{dc}{da}$, $\frac{dd}{da}$, ...

Si, par exemple l'équation était

$$F(x, y, z, a, b)=V=0 ,$$

et qu'on eut

(*) Voyez tom. III, pag. 381.

$$\varphi(a\,,b)=R=0\;,$$

on aurait à éliminer a, b et $\frac{db}{da}$, entre les quatre équations

$$V=0\;,\qquad \left(\frac{dV}{da}\right)+\left(\frac{dV}{db}\right)\frac{db}{da}=0\;,$$

$$R=0\;,\qquad \left(\frac{dR}{da}\right)+\left(\frac{dR}{db}\right)\frac{db}{da}=0\;.$$

Supposons présentement que, dans l'équation

$$F(x\,,y\,,z\,,a\,,b)=V=0\;,$$

les deux paramètres a, b soient indépendans. En faisant varier a seul, on obtiendra une infinité de surfaces dont l'enveloppe aura pour équation le résultat de l'élimination de ce paramètre entre les deux équations

$$V=0\;,\qquad \left(\frac{dV}{da}\right)=0\;.$$

Mais si, dans l'équation résultante on fait varier b, à son tour, on obtiendra une infinité d'enveloppes se succédant sans interruption dans l'espace, et ayant conséquemment elles-mêmes une enveloppe commune. Voyons comment on pourra obtenir l'équation de cette dernière enveloppe.

Au lieu de faire d'abord l'élimination de a entre les deux équations, ce qui n'est praticable que dans des cas particuliers, nous pouvons, dans l'équation $\left(\frac{dV}{da}\right)=0$, considérer a comme une fonction de b, donnée par l'équation $V=0$; nous retombons donc ainsi dans le cas que nous venons de traiter tout à l'heure ; et tout se réduit à éliminer a, b et $\frac{da}{db}$ entre les quatre équations

$$\left(\frac{dV}{da}\right)=0\,,\qquad \left(\frac{d^2V}{da\,db}\right)+\left(\frac{d^2V}{da^2}\right)\frac{da}{db}=0\,,$$

$$V=0\,,\qquad \left(\frac{dV}{db}\right)+\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{da}{db}=0\,.$$

Mais, en vertu de la première, la dernière se réduit à $\left(\frac{dV}{db}\right)=0$; donc tout se réduit finalement à éliminer a et b, entre les trois équations

$$V=0\,,\qquad \left(\frac{dV}{da}\right)=0\,,\qquad \left(\frac{dV}{db}\right)=0\,.$$

Si l'on considère présentement que, dans ces trois équations, a et b se trouvent exactement traités de la même manière, on en conclura que, soit que n'ayant d'abord égard qu'à la variabilité de a, puis ensuite à celle de b, ou que n'ayant d'abord égard qu'à la variabilité de b, puis ensuite à celle de a, on cherche l'enveloppe des enveloppes, on n'obtiendra jamais qu'une seule et même surface courbe, laquelle touchera conséquemment toutes les surfaces qu'on déduirait de l'équation $V=0$, en y faisant varier simultanément, d'une manière quelconque, les deux paramètres a et b. Les enveloppes primitives, comme nous l'avons dit plus haut, ont des lignes de contact avec les enveloppés, et il en est de même des enveloppes d'enveloppes, par rapport à ces enveloppes primitives ; mais il est visible que généralement les enveloppes d'enveloppes n'ont que des points de contact avec ces mêmes enveloppées.

Si l'équation $V=0$, contenait des paramètres a, b, c, d, ..., au nombre de n, liées entre eux par $n-2$ équations de relation, la question rentrerait exactement dans la précédente. On pourrait, en effet, considérer tous les paramètres autre que a et b comme des fonctions de ces deux là, données par les $n-2$ équations de relation. En y joignant donc l'équation $V=0$, et prenant tour à

tour les différentielles partielles de toutes, par rapport aux paramètres indépendans a et b et à leurs fonctions c, d, e, ... on se trouvera avoir $3n-3$ équations, entre lesquelles on n'aura à éliminer que $3n-4$ quantités, savoir, les n paramètres et les $2n-4$ rapports $\frac{dc}{da}$, $\frac{dc}{db}$, $\frac{dd}{da}$, $\frac{dd}{db}$, $\frac{de}{da}$, $\frac{de}{db}$, ...

Que par exemple l'équation proposée soit

$$F(x, y, z, a, b, c, a', b', c') = V = 0,$$

es six paramètres étant liés par les quatre relations

$$f(a, b, c) = S = 0, \qquad f'(a', b', c') = S' = 0,$$

$$\varphi(a, b, c, a', b', c') = P = 0, \quad \psi(a, b, c, a', b', c') = Q = 0;$$

en considérant a, b, c, c' comme des fonctions des deux paramètres indépendans a', b', il faudra éliminer ces six paramètres et les huit rapports

$$\frac{da}{da'}, \ \frac{db}{da'}, \ \frac{dc}{da'}, \ \frac{dc'}{da'},$$

$$\frac{da}{db'}, \ \frac{db}{db'}, \ \frac{dc}{db'}, \ \frac{dc'}{db'},$$

entre les quinze équations

$$V = 0, \quad S = 0, \quad S' = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{da}{da'} + \left(\frac{dV}{db}\right)\frac{db}{da'} + \left(\frac{dV}{dc}\right)\frac{dc}{da'} + \left(\frac{dV}{da'}\right) + \left(\frac{dV}{dc'}\right)\frac{dc'}{da'} = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{da}{db'} + \left(\frac{dV}{db}\right)\frac{db}{db'} + \left(\frac{dV}{dc}\right)\frac{dc}{db'} + \left(\frac{dV}{db'}\right) + \left(\frac{dV}{dc'}\right)\frac{dc'}{db'} = 0,$$

$$\left(\frac{dS}{da}\right)\frac{da}{da'}+\left(\frac{dS}{db}\right)\frac{db}{da'}+\left(\frac{dS}{dc}\right)\frac{dc}{da'}=0,\quad \left(\frac{dS'}{da'}\right)+\left(\frac{dS'}{dc'}\right)\frac{dc'}{da'}=0,$$

$$\left(\frac{dS}{da}\right)\frac{da}{db'}+\left(\frac{dS}{db}\right)\frac{db}{db'}+\left(\frac{dS}{dc}\right)\frac{dc}{db'}=0,\quad \left(\frac{dS'}{db'}\right)+\left(\frac{dS'}{dc'}\right)\frac{dc'}{db'}=0,$$

$$\left(\frac{dP}{da}\right)\frac{da}{da'}+\left(\frac{dP}{db}\right)\frac{db}{da'}+\left(\frac{dP}{dc}\right)\frac{dc}{da'}+\left(\frac{dP}{da'}\right)+\left(\frac{dP}{dc'}\right)\frac{dc'}{da'}=0,$$

$$\left(\frac{dP}{da}\right)\frac{da}{db'}+\left(\frac{dP}{db}\right)\frac{db}{db'}+\left(\frac{dP}{dc}\right)\frac{dc}{db'}+\left(\frac{dP}{db'}\right)+\left(\frac{dP}{dc'}\right)\frac{dc'}{db'}=0;$$

$$\left(\frac{dQ}{da}\right)\frac{da}{da'}+\left(\frac{dQ}{db}\right)\frac{db}{da'}+\left(\frac{dQ}{dc}\right)\frac{dc}{da'}+\left(\frac{dQ}{da'}\right)+\left(\frac{dQ}{dc'}\right)\frac{dc'}{da'}=0,$$

$$\left(\frac{dQ}{da}\right)\frac{da}{db'}+\left(\frac{dQ}{db}\right)\frac{db}{db'}+\left(\frac{dQ}{dc}\right)\frac{dc}{db'}+\left(\frac{dQ}{db'}\right)+\left(\frac{dQ}{dc'}\right)\frac{dc'}{db'}=0.$$

Ce cas est précisément celui que nous allons rencontrer dans ce qui va suivre.

Soit S une surface quelconque, séparant deux milieux homogènes, d'un pouvoir réfringent inégal. Soit une autre surface S′, située dans l'un de ces milieux, et de chacun des points de laquelle émanent des rayons incidens, dans des directions qui lui sont respectivement normales en ces points. Considérons, en particulier, le rayon incident qui émane du point (a', b', c') de cette surface rayonnante ; et soit (a, b, c) son point d'incidence sur la surface séparatrice. Soit enfin (x, y, z) un quelconque des points du rayon réfracté.

Les trois coordonnées a, b, c, ainsi que les trois coordonnées a', b', c', doivent être liées entre elles par des équations de relation que nous représenterons respectivement par

$$f(a,b,c)=S=0\ ,\quad f'(a'b'c')=S'=0.$$

Soient faits, pour abréger

$$dc=p\,da+q\,db\ ,\quad dc'=p'da'+q'db'.$$

En représentant par X, Y, Z les coordonnées courantes, nous aurons pour les équations

1.° du rayon incident . . . . $\left\{\begin{array}{l} X-a=\dfrac{a-a'}{c-c'}(Z-c)\ ; \\ Y-b=\dfrac{b-b'}{c-c'}(Z-c)\ , \end{array}\right.$

2.° de la normale au point d'incidence $\left\{\begin{array}{l} X-a=-p\,(Z-c)\ , \\ Y-b=-q\,(Z-c)\ ; \end{array}\right.$

3.° du rayon réfracté . . . . $\left\{\begin{array}{l} X-a=\dfrac{x-a}{z-c}(Z-c)\ , \\ Y-b=\dfrac{y-b}{z-c}(Z-c)\ ; \end{array}\right.$

Il faudra d'abord exprimer que ces trois droites sont dans un même plan passant par le point (a, b, c) ce qui donnera

$$\{(b-b')+q(c-c')\}\{(x-a)+p(z-c)\}=\{(a-a')+p(c-c')\}\{(y-b)+q(z-c)\}\quad (1)$$

Les cosinus des angles d'incidence et de réfraction seront respectivement

$$\frac{p(a-a')+q(b-b')-(c-c')}{\sqrt{(1+p^2+q^2)\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}}}\ ,$$

$$\frac{p(x-a)+q(y-b)-(z-c)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}}};$$

d'où on conclura, pour les sinus de ces mêmes angles,

$$\sqrt{\frac{\{(a-a')+p(c-c')\}^2+\{p(b-b')-q(a-a')\}^2+\{(b-b')+q(c-c')\}^2}{(1+p^2+q^2)\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}}},$$

$$\sqrt{\frac{\{(x-a)+p(z-c)\}^2+\{p(y-b)-q(x-a)\}^2+\{(y-b)+q(z-c)\}^2}{(1+p^2+q^2)\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}}}.$$

Si donc le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction est celui de m à n, en divisant ces deux formules l'une par l'autre, on aura, en quarrant,

$$\frac{\{(a-a')+p(c-c')\}^2+\{p(b-b')-q(a-a')\}^2+\{(b-b')+q(c-c')\}^2}{\{(x-a)+p(z-c)\}^2+\{p(y-b)-q(x-a)\}^2+\{(y-b)+q(z-c)\}^2}\cdot\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}=\frac{m^2}{n^2}.\quad(2)$$

Remarquons présentement que les équations de la normale à la surface S' au point (a', b', c') sont

$$X-a'=-p'(Z-c')\quad,\quad Y-b'=-q'(Z-c')\;;$$

mais les équations du rayon incident peuvent être écrites ainsi

$$X-a'=\frac{a-a'}{c-c'}(Z-c')\quad,\quad Y-b'=\frac{b-b'}{c-c'}(Z-c')\;;$$

puis donc que cette normale et ce rayon doivent se confondre en une seule et même droite, on doit avoir

$$\frac{a-a'}{c-c'}=-p'\quad,\quad\frac{b-b'}{c-c'}=-q'\;;$$

c'est-à-dire,

$$(a-a')+p'(c-c')=0\ ,\quad (P')\ ,\quad (b-b')+q'(c-c')=0\ .\quad (Q')$$

Cela posé ; soient prises arbitrairement des valeurs de a' et b', on en conclura celles de c', p', q', au moyen de l'équation $S'=0$. Ces valeurs étant substituées dans les équations (P'), (Q'), combinées avec l'équation $S=0$, on en tirera les valeurs correspondantes de a, b, c, p, q ; en substituant les unes et les autres dans les équations (1) et (2), les équations résultantes, en x, y, z, seront indistinctement satisfaites par tous les points de la direction du rayon réfracté répondant aux valeurs particulières attribuées à a', b'.

Puis donc que ces équations laissent x, y, z indéterminées et, n'établissent entre elles que deux relations seulement, il doit nous être permis d'établir, entre ces trois coordonnées, une relation tout-à-fait arbitraire ; au quel cas elles deviendront alors les coordonnées d'un point déterminé du rayon réfracté. Cherchons seulement à choisir cette relation de manière à rendre les calculs nécessaires pour la recherche du point (x, y, z) de la direction du rayon réfracté aussi simple et symétrique qu'il se pourra.

Or, si nous posons

$$(x-a)+p(z+c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')+p(c-c')\}\ ,\quad (P)$$

l'équation (1) deviendra

$$(y-b)+q(x-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(b-b')+q(c-c')\}\ ;\quad (Q)$$

on tirera de l'élimination de $z-c$ entre elles

$$p(y-b)-q(x-a)=-\frac{n^2}{m^2}\{p(b-b')-q(a-a')\}\ .$$

Ajoutant membre à membre les quarrés de ces équations, on trouvera

$$\frac{\{(a-a')+p(c-c')\}^2+\{p(b-b')-q(a-a')\}^2+\{(b-b')+q(c-c')\}^2}{\{(x-a)+p(z-c)\}^2+\{p(y-b)-q(x-a)\}^2+\{(y-b)+q(z-c)\}^2}=\frac{m^4}{n^4};$$

au moyen de quoi l'équation (2) se réduira simplement à

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}. \quad (V)$$

Ainsi les coordonnées du point (x, y, z) de la direction du rayon réfracté, qui répond à des valeurs quelconques de a' et b', se déduiront finalement de sept équations

$$S=0, \quad (S) \qquad S'=0, \quad (S')$$

$$(a-a')+p'(c-c')=0, \quad (P') \quad (b-b')+q'(c-c'=0, \quad (Q')$$

$$(x-a)+p(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')+p(c-c')\}, \quad (P)$$

$$(y-b)+q(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(b-b')+q(c-c')\}, \quad (Q)$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}; \quad (V)$$

de sorte qu'en éliminant des trois dernières a, b, c, c', au moyen des quatre premières, on pourra en tirer les valeurs de x, y, z, en fonction des variables indépendantes a', b'.

On remarquera que l'équation (V) est celle d'une sphère qui a son centre au point d'incidence (a, b, c), et dont le rayon $\frac{n}{m}\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}$ est à la distance $\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}$ de son centre à la surface rayonnante dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence. Quant aux équations

(P) et (Q), on voit que ce sont celles d'une parrallèle à la normale à (S) au point d'incidence (a, b, c) ; de sorte que le point (x, y, z) est un de ceux où cette parallèle perce la sphère.

Si l'on voulait obtenir l'équation de la surface lieu de tous les points (x, y, z), il ne s'agirait évidemment que d'éliminer les six paramètres a, b, c, a', b', c' entre les sept équations ci-dessus. Cherchons plus particulièrement quelle est cette surface.

A raison de la variabilité et de l'indépendance de a' et b', l'équation (V) appartient proprement à une infinité de sphères. Ces sphères ont toutes leurs centres sur la surface séparatrice (S) ; et le rayon de chacune d'elles est à la plus courte distance de son centre à la surface rayonnante (S′) dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence. Cherchons la surface qui les enveloppe toutes.

D'après ce que nous avons dit au commencement de cet article, on voit que, pour parvenir à l'équation de cette surface, il ne s'agit que d'éliminer les six paramètres a, b, c, a', b', c' et les huit rapports

$$\frac{da}{da'}, \quad \frac{db}{da'}, \quad \frac{dc}{da'}, \quad \frac{dc}{da'}$$
$$\frac{da}{db'}, \quad \frac{db}{db'}, \quad \frac{dc}{db'}, \quad \frac{dc'}{db'}$$

entre les cinq équations (S), (S′), (P′), (Q′), (V) et leurs différentielles partielles prises tour à tour par rapport à a', b' et à leurs fonctions a, b, c, c'.

Or en différentiant d'abord l'équation (V) sous ce point de vue, et observant que

$$\frac{dc}{da'}=\frac{dc}{da}\frac{da}{da'}+\frac{dc}{db}\frac{db}{da'}=p\frac{da}{da'}+q\frac{db}{da'}, \qquad \frac{dc'}{da'}=p',$$
$$\frac{dc}{db'}=\frac{dc}{da}\frac{da}{db'}+\frac{dc}{db}\frac{db}{db'}=p\frac{da}{db'}+q\frac{db}{db'}; \qquad \frac{dc'}{db'}=q',$$

on trouvera,

$$\left.\begin{aligned}&\{[(x-a)+p(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(a-a')+p(c-c')]\}\frac{da}{da'}\\+&\{[(y-b)+q(z-c)+\frac{n^2}{m^2}[(b-b')+q(c-c')]\}\frac{db}{da'}\end{aligned}\right\}=\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')+p'(c-c')\},$$

$$\left.\begin{aligned}&\{[(x-a)+p(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(a-a')+p(c-c')]\}\frac{da}{db'}\\+&\{[(y-b)+q(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(b-b')+q(c-c')]\}\frac{db}{db'}\end{aligned}\right\}=\frac{n^2}{m^2}\{(b-b')+p'(c-c')\};$$

ou simplement, en vertu des relations (P′), (Q′)

$$\left.\begin{aligned}&\{[(x-a)+p(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(a-a')+p(c-c')]\}\frac{da}{da'}\\+&\{[(y-b)+q(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(b-b')+q(c-c')]\}\frac{db}{da'}\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\{[(x-a)+p(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(a-a')+p(c-c')]\}\frac{da}{db'}\\+&\{[(y-b)+q(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(b-b')+q(c-c')]\}\frac{db}{db'}\end{aligned}\right\}=0:$$

or, les surfaces (S), (S′) pouvant toutes deux être prises arbitrairement, il s'ensuit que a', b', c' doivent être tout-à-fait indépendans de a, b, c et conséquemment ces deux dernières équations ne doivent établir aucune relation entre les quatre rapports $\frac{da}{da'}$, $\frac{db}{da'}$, $\frac{da}{db'}$, $\frac{db}{db'}$; ce qui exige qu'on ait à la fois

$$(x-a)+p(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')+p(c-c')\};$$

$$(y-b)+q(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(b-b')+q(c-c')\};$$

ces deux équations doivent donc, dans la recherche qui nous occupe, remplacer les deux qui les précèdent; mais ces équations ne sont autre chose que les équations (P), (Q); donc la recherche de l'équation de l'enveloppe de toutes les sphères (V), tout comme la recherche du lieu de tous les points (x, y, z) se réduit à l'élimination de a, b, c, a', b', c' entre les sept équations (S), (S'), (P'), (Q'), (P), (Q), (V); donc cette enveloppe n'est autre chose que le lieu même des points (x, y, z); or chacun de ces points, étant celui où l'une des sphères est percée par le rayon réfracté qui émane de son centre, doit être normal à sa surface; il le sera donc aussi à l'enveloppe qui la touche en ce point; on a donc finalement cet élégant théorème:

THÉORÈME I. Deux milieux homogènes, d'un pouvoir réfringent inégal, étant séparés par une surface quelconques, et des rayons incidens, situés dans l'un d'eux, étant traversés orthogonalement par une même surface; si des différens points de la surface séparatrice des deux milieux, pris successivement pour centres, on décrit des sphères, dont les rayons soient aux distances de leurs centres à la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence, l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfractés (*).

Si l'on suppose les rayons incidens parallèles à une droite fixe, tout plan perpendiculaire à cette droite pourra être pris pour surface trajectoire orthogonale de ces rayons, et on obtiendra le théorème suivant:

THÉORÈME II. Deux milieux homogènes d'un pouvoir réfringent inégal étant séparés par une surface quelconque, et des rayons incidens parallèles étant dirigés d'une manière quelconque dans l'un de ces milieux; Si, des différens points de la surface séparatrice, pris successivement pour centres, on décrit des sphères, dont les rayons soient aux distances de leurs centres à un plan

---

(*) M. Sarrus nous a adressé postérieurement une démonstration de ce théorème.

fixe conduit arbitrairement, dans une direction perpendiculaire à celle des rayons incidens, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence, l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfractés.

Si l'on suppose que les rayons incidens émanent d'un même point, toute sphère décrite de ce point comme centre pourra être prise pour surface trajectoire orthogonale de ces rayons. En choisissant donc pour cette surface une sphère du rayon nul, on obtiendra le théorème suivant :

THORÈME III. Deux milieux homogènes d'un pouvoir réfringent inégal étant séparés par une surface quelconque, et un point rayonnant étant situé d'une manière quelconque dans l'un d'eux, si, des différens points de la surface séparatrice des deux milieux, pris successivement pour centres, on décrit des sphères dont les rayons soient aux distances de leurs centres au point radieux dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence, l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfractés.

Si l'on suppose que les sinus d'incidence et de réfraction ne diffèrent l'un de l'autre que par le signe, la réfraction se changera en réflexion, et on obtiendra ces trois autres théorèmes.

THÉORÈME IV. Des rayons de lumière normaux à tous les points d'une surface quelconque se réfléchissant à la rencontre d'une autre surface également quelconque; si, des différens points de la surface réfléchissante, pris successivement pour centres, on décrit des sphères tangentes à la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens; l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfléchis (*).

(*) M. Dupin a donné une démonstration géométrique fort élégante de ce théorème, à la page 195 de ses *Applications de géométrie*. Nous accueillerions avec empressement une démonstration analogue de notre *Théorème I*, si elle nous était adressée.

THÉORÈME V. Des rayons de lumière parallèles entre eux se réfléchissant à la rencontre d'une surface quelconque; si, des différens points de cette surface, pris successivement pour centres, on décrit des sphères tangentes à un même plan, perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens; l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfléchis.

THÉORÈME VI. Des rayons de lumière, issus d'un même point de l'espace, se réfléchissant à la rencontre d'une surface quelconque; si, des différens points de cette surface, pris successivement pour centres, on décrit des sphères qui passent par le point rayonnant; l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des trajectoires orthogonales des rayons réfléchis.

Si l'on suppose que la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens, ainsi que la surface séparatrice ou réfléchissante, sont deux surfaces de révolution ayant même axe; auquel cas l'enveloppe de sphères sera aussi une surface de révolution, ayant même axe que les deux premières; en considérant ce qui se passe dans un plan quelconque, passant par cet axe, on retombera sur les six théorèmes relatifs aux caustiques planes que nous avons démontrés dans le mémoire rappelé au commencement de celui-ci qui, de cette sorte, peut le suppléer complètement.

On voit, par ce qui précède, que si des rayons incidens peuvent être traversés orthogonalement par une même surface, ou, ce qui revient au même, si ces rayons forment deux séries de surfaces développables, telles que chacune des surfaces de l'une des séries soit coupée orthogonalement par toutes les surfaces de l'autre série; ce qui comprend, comme cas particuliers, les cas où ces rayons seraient issus d'un même point ou parallèles entre eux; tant de réfraction et de réflexion qu'on voudra leur faire subir successivement à la rencontre de surfaces quelconques, ne pourront leur faire perdre ce caractère, c'est-à-dire, qu'après les avoir subies, ils pourront encore

être traversés orthogonalement par une même surface, et seront conséquemment distribués en deux séries de surfaces développables, telles que chacune des surfaces de l'une des séries sera traversée orthogonalement par toutes les surfaces de l'autre série. C'est en cela que consiste la belle extension donnée par M. Dupin aux théorèmes de Malus, qui ne croyait la proposition vraie que pour une première réfraction ou une première réflexion seulement. Ce qui précède présente même un moyen facile et uniforme d'obtenir une trajectoire orthogonale des derniers rayons réfractés ou réfléchis, lorsqu'on connaît une trajectoire orthogonale des premiers rayons incidens, les diverses surfaces séparatrices ou réfléchissantes, et les pouvoirs réfringens des divers milieux homogènes séparés par ces surfaces.

Dans le cas d'une réfraction ou d'une réflexion unique, lorsque le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est donné, de ces trois choses, la surface séparatrice ou réfléchissante, la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens et la surface trajectoire orthogonale des rayons réfractés ou réfléchis, deux quelconques étant données, on peut toujours déterminer la troisième.

En effet 1.° nous avons déjà vu qu'en représentant par a', b', c' les coordonnées de la trajectoire orthogonale des rayons incidens, par a, b, c les coordonnées de la surface séparatrice ou réfléchissante, par $S=0$, $S'=0$, les équations respectives de ces deux surfaces, par $\frac{n}{m}$ le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, posant pour abréger

$$\frac{dc}{da}=p, \quad \frac{dc}{db}=q, \quad \frac{dc'}{da'}=p', \quad \frac{dc'}{db'}=q',$$

et désignant enfin par x, y, z les coordonnées de la trajectoire orthogonale des rayons réfractés ou réfléchis, l'équation de cette dernière surface était le résultat de l'élimination de a, b, c, a', b', c' entre les sept équations

$$S=0\ ,\qquad S'=0\ ,$$

$$(a-a')+p'(c-c')=0\ ,\qquad (b-b')+q'(c-c')=0\ ,$$

$$m^2\{(x-a)+p(z-c)\}+n^2\{(a-a')+p(c-c')\}=0\ ,$$

$$m^2\{(y-b)+q(z-c)\}+n^2\{(b-b')+q(c-c')\}=0\ ,$$

$$m^2\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}=n^2\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}\ .$$

2.° Si l'on demandait à quelle surface des rayons incidens doivent être normaux pour qu'après s'être réfractés ou réfléchis à la rencontre d'une surface donnée, ils devinssent normaux à une autre surface donnée ; on éliminerait d'abord x, y, z entre les trois dernières équations et l'équation donnée de la trajectoire orthogonale des rayons réfractés ou réfléchis ; éliminant ensuite a, b, c entre l'équation résultante, l'équation $S=0$ et les deux équations

$$(a-a')+p'(c-c')=0\ ,\quad (b-b')+q'(c-c')=0\ ,$$

l'équation qu'on obtiendrait en a', b', c', p', q' serait l'équation différentielle de la trajectoire orthogonale des rayons incidens.

3.° Si enfin on demandait à la rencontre de quelle surface des rayons de lumière normaux à une surface donnée doivent se réfracter ou se réfléchir, pour devenir, après leur réfraction ou leur réflexion, normaux à une autre surface donnée ; on éliminerait d'abord, comme ci-dessus, x, y, z entre l'équation donnée de la trajectoire orthogonale des rayons réfractés ou réfléchis. Eliminant ensuite a', b', c' entre l'équation résultante, l'équation $S'=0$ et les deux équations

$$(a-a')+p'(c-c')=0\ ,\quad (b-b')+q'(c-c')=0\ ;$$

l'équation résultante en a, b, c, p, q serait l'équation différentielle de la surface séparatrice ou réfléchissante cherchée.

Soient des rayons incidens normaux à une surface quelconque. Après avoir subi tant de réfractions et de réflexions consécutives qu'on voudra, à la rencontre d'autres surfaces séparant des milieux homogènes quelconques, ils deviendront normaux à une autre surface; et l'on pourra, comme dans la dernière question que nous venons de traiter, déterminer l'équation différentielle de la surface unique à la rencontre de laquelle les rayons incidens devraient se réfracter ou se réfléchir, pour devenir immédiatement normaux à la dernière des deux surfaces, et, parce que l'équation sera différentielle, le problème aura une infinité de solutions, même dans le cas de la réflexion, pour lequel $\frac{m}{n}=-1$.

Donc, *pour des rayons de lumières normaux à une même surface, l'effet de tant de réfractions et de réflexions consécutives qu'on voudra, à la rencontre de surfaces quelconques, séparant des milieux homogènes également quelconques, peut toujours être remplacé, et même d'une infinité de manières différentes, soit par une réfraction soit par une réflexion unique.* Nous revenons donc ici, par une route beaucoup plus briève, à la proposition que nous nous étions proposés d'établir dans la troisième partie du mémoire de la page 129 de notre XIV.e volume.

Le peu qui précède peut donc remplacer, à la rigueur, et le grand travail de Malus, et l'extension remarquable qu'il a reçue entre les mains de M. Dupin, et le long article que nous venons de rappeler, et enfin celui que nous avons récemment publié sur les caustiques planes; de sorte qu'il ne nous restera plus maintenant qu'à offrir des applications variées de nos formules.

A mesure qu'une science s'étend et s'enrichit de nouveaux faits, a dit un grand géomètre, elle en devient aussi plus compliquée; et on ne saurait la simplifier qu'en généralisant et réduisant, à la fois, les méthodes qui peuvent être susceptibles de ces avantages.

C'est là aussi le but que nous nous sommes efforcés d'atteindre dans l'essai qu'on vient de lire.

ARITHMÉTIQUE PRATIQUE.

Sur l'erreur que l'emploi des parties proportionnelles peut entraîner dans les calculs par logarithmes ;

Par M. Vincent, Professeur de mathématiques et de physique au Collége royal de Reims.

Lorsque, dans les calculs par logarithmes, pour suppléer à l'insuffisance des tables, on a recours aux parties proportionnelles, les résultats auxquels on parvient sont affectés de deux sortes d'erreurs; 1.° on suppose d'abord les différences des logarithmes proportionnelles à celles des nombres auxquels ils appartiennent; ce qui, même pour des nombres très-grands et très-peu différens, n'est qu'à peu près vrai; 2.° en admettant cette proportionnalité, les logarithmes que l'on emploie pour calculer le résultat qu'on veut obtenir, ne sont point exacts, et peuvent être fautifs, en plus ou en moins, d'une quantité qui a pour limite une demi-unité décimale du dernier ordre.

Bertrand de Genève a discuté, il y a déjà long-temps, l'effet de la première de ces deux causes d'erreur (*); mais il n'a rien

---

(*) Tout ce que Bertrand a si longuement développé sur ce sujet, dans

dit de la second qui est pourtant beaucoup plus influente. C'est en conséquence le seul point que nous traiterons ici où nous supposerons que, dans les limites de l'approximation des tables, la proportionnalité entre les différences des nombres et celles de leurs logarithmes peut être regardée comme tout-à-fait rigoureuse.

---

son volumineux ouvrage, nous paraît pouvoir être réduit au peu qui suit:

Lorqu'on cherche, par les parties proportionnelles, le logarithme d'un nombre en partie entier et en partie fractionnaire, on emploie dans le calcul les logarithmes de deux nombres consécutifs des tables, ne différant que d'une unité; d'où il suit que, pour que l'emploi des parties proportionnelles soit légitime, il faut, tout au moins, que les différences des logatithmes soient constantes en même temps que celles des nombres, pour une portion des tables dans laquelle les nombres extrèmes ne diffèrent que d'une unité. En prenant donc pour ces nombres extrêmes $N-\frac{1}{2}$ et $N+\frac{1}{2}$ il faudra que, si l'on n'a pas rigoureusement

$$\text{Log.}N-\text{Log.}(N-\tfrac{1}{2})=\text{Log.}(N+\tfrac{1}{2})-\text{Log.}N\,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{Log.}\frac{N}{N-\frac{1}{2}}=\text{Log.}\frac{N+\frac{1}{2}}{N}\,,$$

la différence entre ces deux quantités soit au moins plus petite qu'une demi-unité décimale du dernier ordre des tables; c'est-à-dire qu'en désignant par n le nombre des chiffres décimaux admis dans les tables, il faudra qu'on ait

$$\text{Log.}\frac{N}{N-\frac{1}{2}}-\text{Log.}\frac{N+\frac{1}{2}}{N}=\text{Log.}\frac{N^2}{N^2-\frac{1}{4}}=\text{Log.}\frac{4N^2}{4N^2-1}<\frac{1}{2.10^n}\,.$$

Mais en désignant par μ le module de nos tables vulgaires, on a rigoureusement

$$\text{Log.}\frac{4N^2}{4N^2-1}=2\mu\left\{\frac{1}{8N^2-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(8N^2-1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(8N^2-1)^5}+\dots\right\};$$

Nous ferons d'abord observer que les logarithmes rigoureux diffèrent de ceux qu'on inscrit dans les tables d'une quantité dont la limite est la moitié d'une unité décimale du dernier ordre, et que conséquemment les différences logarithmiques employées peuvent être en erreur d'une quantité dont la limite est une unité toute entière de cet ordre. En second lieu, lorsqu'on multiplie cette différence par la fraction qui accompagne l'entier, dans le nombre dont on veut obtenir le logarithme, on néglige les chiffres du produit qui viennent après le dernier des chiffres décimaux de l'ordre des tables, ce qui affecte le résultat d'une nouvelle erreur, dont la limite est la moitié d'une unité de ce même ordre.

---

et, comme les termes qui suivent le premier dans la série sont d'une petitesse incomparable à la sienne, il suffira bien qu'on ait

$$\frac{2\mu}{8N^2-1} \text{ ou même simplement } \frac{2\mu}{8N^2} < \frac{1}{2.10^n},$$

d'où

$$N > \sqrt{\frac{10.^n\mu}{2}}.$$

En se rappelant donc que $\mu=0,434294481 90\ldots$ on trouvera, pour les tables

à 5 décimales,	$N>147$,
à 6 décimales,	$N>465$,
à 7 décimales,	$N>1473$,
à 8 décimales,	$N>4659$,

et ainsi de suite. On peut donc, dans l'usage des tables de Callet, qui commencent à 10000, employer les parties proportionnelles dès l'origine.

J. D. G.

Cela posé, on peut avoir à résoudre ces deux questions : 1.° *Étant donné un nombre, déterminer le logarithme qui lui répond ?* 2.° *Etant donné un logarithme, déterminer le nombre qui lui répond ?* Occupons-nous tour à tour de leur résolution. Mais, pour plus de simplicité, et attendu l'usage où l'on est dans les tables de supprimer les caractéristiques, considérons les logarithmes des tables comme des entiers, ce qui revient à prendre pour unité l'unité décimale du dernier ordre des tables.

I. Soit $N+f$ un nombre dont on demande le logarithme ; N étant un nombre entier et f une fraction, et soient l et l' les logarithmes de N et $N+1$, tels qu'ils se trouvent dans les tables. Soient λ, λ', respectivement, les quantités dont ces logarithmes sont fautifs *en moins*, les erreurs pouvant d'ailleurs être indifféremment *positives* ou négatives ; en supposant la méthode des parties proportionnelles exacte, comme nous le faisons ici, on aurait

$$\text{Log.}(N+f)=l+\lambda+f.(l'+\lambda'-l-\lambda) ;$$

mais d'abord on néglige λ et λ' ; et en outre on rejette toute la partie fractionnaire du produit $f.(l'-l)$; sauf à augmenter le dernier chiffre de sa partie entière d'une unité, s'il y a lieu ; ce qui peut encore entraîner une erreur dont la limite est une demi-unité.

En représentant par e cette erreur *en moins*, qui peut être d'ailleurs *positive* ou *négative*, on prendra donc $l+f(l'-l)-e$, au lieu de $l+\lambda+f.(l'+\lambda'-l-\lambda)$ qu'on devrait prendre ; d'où résulte l'erreur finale

$$\lambda(1-f)+\lambda'f+e .$$

En supposant donc que les trois erreurs λ, λ', e atteignent leur limite $+\frac{1}{2}$, car c'est évidemment le cas où l'erreur totale est plus considérable ; cette erreur totale sera

$$\tfrac{1}{2}(1-f+f+1)=1 .$$

Ainsi, l'*erreur commise par l'emploi des parties proportionnelles, dans la recherche du logarithme d'un nombre en partie entier et en partie décimal, même dans le cas où cet emploi est légitime, peut s'élever, soit en plus soit en moins, jusqu'à une unité décimale du dernier ordre.*

Donc, une somme de logarithmes et de complémens arithmétiques de logarithmes peut être fautive d'une quantité dont la limite est autant d'unités décimales du dernier ordre qu'il y a de parties dont cette somme se compose.

Donc aussi, si, dans la vue d'obtenir une puissance d'un nombre, on multiplie son logarithme par l'exposant de la puissance, le logarithme produit pourra être fautif d'autant d'unités décimales du dernier ordre qu'il y aura d'unités dans l'exposant de la puissance.

II. Passons à la seconde question. Soit proposé de déterminer le nombre auquel répond un logarithme donné $l+d$, compris entre deux logarithmes consécutifs l et l' des tables, répondant aux nombres, aussi consécutifs, N et $N+1$. On répute pour le nombre cherché

$$N+\frac{d}{l'-l} ;$$

mais d'abord, le logarithme donné $l+d$ n'étant poussé qu'au même degré d'approximation des logarithmes des tables, d est passible d'une erreur *positive* ou *négative en moins* qu'on peut représenter par δ et dont la limite est $\tfrac{1}{2}$. En outre, les deux logarithmes des tables l et l' peuvent, comme ci-dessus, être fautifs en *moins* des quantités, *positives* ou *négatives* λ et λ', dont la limite est également une demi-unité ; enfin au lieu de d on devrait prendre $l+d+\delta-(l+\lambda)$, c'est-à-dire $d+(\delta-\lambda)$; de sorte que le nombre demandé est réellement

$$N + \frac{d+\delta-\lambda}{(l'+\lambda')-(l+\lambda)};$$

en prenant donc sa différence avec l'autre, on aura, pour l'erreur commise

$$\frac{d+\delta-\lambda}{(l'-l)+(\lambda'-\lambda)} - \frac{d}{(l-l')} = \frac{(l'-l)(\delta-\lambda)-d(\lambda'-\lambda)}{(l'-l)\{(l'-l)+(\lambda'-\lambda)\}}$$

ou, en représentant par D la différence des tables;

$$\frac{D(\delta-\lambda)-d(\lambda'-\lambda)}{D\{D+(\lambda'-\lambda)\}};$$

or, il est manifeste que cette fraction sera la plus grande possible, lorsque $\delta-\lambda$ aura la plus grande valeur positive et $\lambda'-\lambda$ la plus grande valeur négative possible, c'est-à-dire, lorsque la première de ces deux quantités sera égale à $+1$ et la seconde égale à -1; de sorte que la limite de l'erreur commise est

$$\frac{D+d}{D(D-1)}.$$

Présentement, si, au lieu de corriger le nombre N par addition, nous eussions voulu corriger le nombre $N+1$ par soustraction, nous aurions eu alors pour limite de l'erreur, en faisant exactement les mêmes raisonnemens et les mêmes calculs,

$$\frac{D+(D-d)}{D(D-1)}.$$

Cela posé, d est toujours compris entre o et D, et la première fraction croît en même temps que lui; mais quand on a $d>\frac{1}{2}D$, on peut prendre la seconde, qui est alors moindre, de sorte que

le maximum d'erreurs répond à $d=\frac{1}{2}D$; ce maximum est donc

$$\frac{3}{2(D-1)}$$

quantité qui croît de plus en plus, à mesure que D diminue ou qu'on avance davantage dans les tables.

Par exemple, dans les tables de Lalande, où la plus petite différence est 4, le maximum de l'erreur est $\frac{1}{2}=0{,}5$ d'où il suit qu'en employant ces tables à la recherche d'un nombre voisin de *dix mille*, à l'aide de son logarithme, on ne pourra pas compter sur le chiffre des dixièmes. Si ce sont les tables de Callet dont on fait usage, comme leur plus petite différence est 44, le maximum de l'erreur sera $\frac{3}{2.43}=0{,}035$, de sorte qu'en employant ces tables à la recherche d'un nombre voisin de *cent mille* à l'aide de son logarithme, on ne devra pas compter sur le chiffre des centièmes.

Si l'on veut déterminer quelle doit être la valeur de D pour que le nombre cherché ne soit pas fautif de la fraction $\frac{1}{n}$, il faudra satisfaire à l'inégalité

$$\frac{3}{2(D-1)}+\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}, \quad \text{d'où} \quad D>3n+1.$$

Ainsi, malgré ce que nous venons de dire, on peut, en employant les tables de Lalande, compter sur le chiffre des dixièmes, lorsque les différences tabulaires ne sont pas moindres que 31, c'est-à-dire, lorsque le nombre cherché est compris entre 1000 et 1400 environ; et, en employant les tables de Callet, on peut compter sur les centièmes, lorsque les différences ne sont pas moindres que 301, c'est-à-dire, lorsque le nombre cherché est compris entre 10000 et 14400 environ.

Dans une autre note nous nous occuperons des tables des fonctions circulaires.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes de géométrie, énoncés à la page 244 du précédent volume;

Par M. C. C. Gerono.

PROBLÈME. *A un cercle donné inscrire ou circonscrire un triangle, dont les trois côtés forment une proportion continue, par différence ou par quotient, dont la raison soit donnée?*

Cet énoncé renferme évidemment quatre problèmes que nous allons traiter successivement.

I. *Triangle inscrit.*

Soit R le rayon d'un cercle auquel on propose d'inscrire un triangle dont les trois côtés forment une proportion continue. Soient x, y, z les trois côtés du triangle, en désignant par T l'aire de ce triangle, on aura

$$16T^2=(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\ ;$$

mais d'un autre côté on sait que

$$R=\frac{xyz}{4T}\ , \qquad \text{d'où} \qquad 16\ T^2R^2=x^2y^2z^2\ ;$$

donc en substituant

$$R^2(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=x^2y^2z^2. \quad (1)$$

Cela posé, 1.° si les trois côtés doivent former une proportion continue par différences, en désignant par d la raison donnée de cette progression, on aura

$$x=y-d \qquad z=y+d;$$

ce qui donnera, en substituant et réduisant,

$$3R^2(y^2-4d^2)=(y^2-d^2)^2;$$

ou bien

$$y^4-(2d^2+3R^2)y^2+d^2(d^2+12R^2)=0;$$

d'où l'on voit que, si le problème est possible, il admettra deux solutions. On tire de là

$$y=\sqrt{\frac{2d^2+3R^2\pm3R\sqrt{R^2-4d^2}}{2}};$$

de sorte que le problème ne sera possible qu'autant que la raison d n'excédera pas la moitié du rayon du cercle donné.

Le côté y étant déterminé par cette formule facile à construire, on en conclura $x=y-d$ et $z=y+d$; et la solution du problème s'achevera sans difficulté.

2.° Si les trois côtés doivent former une proportion continue par quotiens, en désignant par q la raison donnée de cette progression, on aura

$$x=\frac{y}{q} \qquad z=qy$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (1) et réduisant

$$R^2(1+q+q^2)(1+q-q^2)(1+q^2-q)(q^2+q-1)=q^4y^4 ;$$

d'où

$$y=\frac{R}{q^2}\sqrt{(1+q+q^2)(1+q-q^2)(1+q^2-q)(q^2+q-1)} ;$$

d'où l'on voit que le problème est toujours possible, et n'admet qu'une solution unique.

De la valeur de y, on conclura celles de $x=\frac{y}{q}$ et de $z=qy$; et la solution du problème s'achevera sans difficulté.

II. *Triangle circonscrit.*

Soit r le rayon d'un cercle, auquel on propose de circonscrire un triangle dont les trois côtés forment une proportion continue. Soient x, y, z les trois côtés du triangle; en désignant par T, comme ci-dessus, l'aire de ce triangle, on aura

$$16T^2=(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) ;$$

mais, d'un autre côté on sait que

$$2T=r(x+y+z) \quad \text{d'où} \quad 4T^2=r^2(x+y+z)^2 ;$$

donc, en substituant

$$4r^2(x+y+z)=(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) . \quad (2)$$

Cela posé, 1.° si les trois côtés doivent former une proportion continue par différences, en désignant par d la raison donnée de cette progression, on aura

$$x=y-d , \qquad z=y+d ;$$

ce qui donnera, en substituant et réduisant

$$12r^2=(y+2d)(y-2d)=y^2-4d^2.$$

et par suite

$$y=2\sqrt{d^2+3r^2}\;;$$

quantité facile à construire, si l'on remarque que $3r^2$ est le quarré de la corde du tiers de la circonférence. On voit que le problème, toujours possible, n'admet qu'une solution unique.

De la valeur de y on conclura celles de $x=y-d$ et de $z=y+d$; et la solution du problème s'achevera sans difficulté.

2.° Si les trois côtés doivent former une proportion continue par quotiens; en désignant par q la raison de cette progression, on aura

$$x=\frac{y}{q}\;,\qquad z=qy\;,$$

ce qui donnera, en substituant dans (2) et réduisant,

$$4q^2r^2(1+q+q^2)=(1+q-q^2)(1+q^2-q)(q^2+q-1)y^2\;;$$

et conséquemment

$$y=2qr\sqrt{\frac{1+q+q^2}{(1+q-q^2)(1+q^2-q)(q^2+q-1)}}\;.$$

On voit que le problème, toujours possible, n'admet qu'une solution unique.

De la valeur de y, on conclura celles de $x=\frac{y}{q}$ et de $z=qy$: et la solution du problème s'achevera sans difficulté.

Démonstration du théorème de Statique énoncé à la page 272 du présent volume ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professseur au collége royal de Montpellier,

M. Sarrus, docteur ès sciences, professeur au collége de Pézenas,

M. A. E. Morel, capitaine au corps royal d'artillerie,

Et M. Querret, professeur de mathématiques transcendantes à la faculté des sciences de Montpellier.



Théorème. *Si des forces, au nombre de* n, *agissant sur un même point* O *de l'espace, sont représentées, en intensité et en direction, par des droites* OP_1, OP_2, OP_3, ... OP_n, *issues de ce point, le centre* M *des moyennes distances des points* P_1, P_2, P_3, ...P_n *sera un des points de la résultante de ces forces; et, si cette résultante est représentée en intensité et en direction par* OR, *on aura* $OR=n\times OM$.

Démonstration. Trois des démonstrations que nous avons reçues se ressemblent pour le fond. Dans toutes on a rapporté le système à trois axes rectangulaires passant par le point O ; seulement M. Sarrus a fait passer l'axe des z par le point M ; et, comme il en résulte quelques simplifications, nous adopterons un pareil choix d'axes de coordonnées.

Soient alors (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... (x_n, y_n, z_n) les points que nous avons désignés par P_1, P_2, ... P_n; on aura d'après la situation de l'axe des z

$$x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n=0\ ,$$
$$y_1+y_2+y_3+\ldots\ldots+y_n=0\ ,$$
$$z_1+z_2+z_3+\ldots\ldots+z_n=n.OM.$$

Soient ensuite X, Y, Z les coordonnées du point R : si l'on décompose la résultante OR suivant les trois axes, X, Y, Z en seront les composantes, et l'on devra avoir

$$X=x_1+x_2+x_3+\dots\dots+x_n\ ,$$
$$Y=y_1+y_2+y_3+\dots\dots+y_n\ ,$$
$$Z=z_1+z_2+z_3+\dots\dots+z_n\ ;$$

on aura donc aussi

$$X=0\ ,\qquad Y=0\ ,\qquad Z=n.OM$$

la résultante OR est donc dans l'axe des z, et passe ainsi par le point M ; et l'on a de plus $OR=z=n.OM$ (*).

M. Lenthéric observe, comme l'avait déjà fait M. Gerono à qui l'on doit le théorème que, quelle que soit la position du point O, dans l'espace, la résultante OR passera toujours par le même point M.

Il remarque encore que, si l'on a un tétraèdre OABC, et qu'on joigne par une droite OM le point O avec le centre M des moyennes distances des trois points A, B, C, la longueur OM sera dirigée suivant la diagonale OR du parallélipipède construit sur OA, OB, OC, et sera le tiers de la sienne.

M. Querret a suivi un autre tour de démonstration. Il remarque d'abord que, dans le cas de deux forces, la vérité du théorème est manifeste, puisqu'il n'est alors que le principe du parallélogramme, énoncé sous une autre forme. Il démontre ensuite que, si ce théorème est vrai pour n force, il sera vrai encore en introduisant une nouvelle force dans le système, ce qui est également sans difficulté, et il en conclut que ce théorème est vrai quel que soit le nombre des forces.

(*) Voyez aussi la page 314 du précédent volume.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'Optique.

Lorsque les rayons solaires pénètrent obliquement dans une tasse de porcelaine blanche, il se forme, au fond de la tasse, une caustique bien prononcée. On propose de trouver l'equation de cette courbe.

Problèmes de Géométrie.

I. Etant données les deux extrémités d'une droite que quelque obstacle situé entre elles empêche de tracer, ainsi que les deux extrémités d'une autre droite que quelque obstacle situé entre elles empêche également de tracer; construire une droite qui contienne le point de concours de ces deux là, en n'employant, s'il est possible, que la règle seulement ?

II. Etant données deux droites que quelque obstacle empêche de prolonger jusqu'à leur point de concours, ainsi que deux autres droites que quelque obstacle empêche également de prolonger jusqu'à leur point de concours; construire un des points de la droite qui joindrait le point de concours des deux premières au point de concours des deux dernières, en n'employant, s'il est possible, que la règle seulement ?

Théorème de Combinaisons.

Si un polyèdre régulier a m faces de n côtés chacune, on pourra appliquer m couleurs différentes sur ses faces d'un nombre de manière exprimé par

$$\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(m-2)(m-1)}{2n}$$

GÉOMÉTRIE DES SURFACES COURBES.

Théorèmes sur l'hyperboloïde à une nappe et sur la surface conique du second ordre ;

Par M. L. F. MAGNUS.



§. I.

SOIT une hyperboloïde à une nappe rapportée à ses axes et donnée par l'équation

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2. \qquad (1)$$

On sait que cette surface peut, tout aussi bien que le cône, être engendré par le mouvement d'une droite. Prenant donc pour les équations d'une génératrice quelconque

$$x=mz+g\,, \qquad y=nz+h\,; \qquad (K)$$

nous exprimerons que cette génératrice est sur l'hyperboloïde en exprimant que l'équation en z résultant de la substitution des valeurs (K) de x et y dans (1), laissent cette coordonnée indéterminée. Or, cette équation est

$$b^2c^2(mz+g)^2+a^2c^2(nz+h)^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2=0\,,$$

ou bien

$$(b^2c^2m^2+a^2c^2n^2-a^2b^2)z^2+2c^2(b^2mg+a^2nh)z+c^2(b^2g^2+a^2h^2-a^2b^2)=0\,;$$

de sorte qu'on doit avoir, à la fois,



$$\left.\begin{aligned} b^2c^2m^2+a^2c^2n^2&=a^2b^2\ ,\\ b^2mg+a^2nh&=0\quad ,\\ b^2g^2+a^2h^2&=a^2b^2\ . \end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

Si l'hyperboloïde n'est pas de révolution, ses deux demi-axes transverses a et b sont inégaux. Soit a le plus grand des deux ; et considérons, dans le plan des xz, les deux droites données par l'équation $y=0$ combinée avec la double équation

$$x\sqrt{b^2+c^2}\mp z\sqrt{a^2-b^2}=0\ ;\qquad \binom{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}$$

droites que nous nommerons *lignes focales*, à raison des propriétés que nous allons démontrer leur appartenir, et qui se confondraient toutes deux avec l'axe des z, si l'hyperboloïde était de révolution. Si nous désignons par p et p' les angles que fait la génératrice (K) avec les deux droites (F,F'), et par q,q' les supplémens de ces angles, nous aurons

$$\mathrm{Cos}.p=-\mathrm{Cos}.q=\pm\frac{\sqrt{b^2+c^2}+m\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(1+m^2+n^2)(a^2+c^2)}}\ ,$$

$$\mathrm{Cos}.p'=-\mathrm{Cos}.q'=\pm\frac{\sqrt{b^2+c^2}-m\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(1+m^2+n^2)(a^2+c^2)}}\ .$$

En chassant n^2 de ces formules, au moyen de la première des équations (2) elles deviendront

$$\mathrm{Cos}.p=-\mathrm{Cos}.q=\pm ac.\frac{\sqrt{b^2+c^2}+m\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+m^2c^2(a^2-b^2)]}}\ ,$$

$$\mathrm{Cos}.p'=-\mathrm{Cos}.q'=\pm ac.\frac{\sqrt{b^2+c^2}-m\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+m^2c^2(a^2-b^2)]}}\ .$$

De là on conclura

$$\text{Sin.}p=\text{Sin.}q=\frac{a^2\sqrt{b^2+c^2}-mc^2\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+m^2c^2(a^2-b^2)]}}\ ,$$

$$\text{Sin.}p'=\text{Sin.}q'=\frac{a^2\sqrt{b^2+c^2}+mc^2\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+m^2c^2(a^2-b^2)]}}\ ;$$

et par suite

$$\text{Cos.}(p+p')=\text{Cos.}(q+q')=+\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\ ,$$

$$\text{Cos.}(q-p')=\text{Cos.}(p-q')=-\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\ ;$$

quantité constante, puisque m n'y entre plus. En outre, la tangente de l'angle des asymptotes de la section de l'hyperboloïde qui contient les lignes focales étant $\pm\frac{2ca}{c^2-a^2}$, son cosinus sera $\pm\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}$; de sorte qu'on a ce théorème :

La somme ou la différence des deux angles que fait la droite génératrice de l'hyperboloïde à une nappe dans toutes ses positions, avec les deux lignes focales de cette surface est constante, et égale à l'angle des asymptotes de la section faite dans l'hyperboloïde par le plan qui contient ces lignes focales.

Si, au lieu de considérer l'hyperboloïde, nous eussions considéré la surface conique du second ordre donnée par l'équation.

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0\ ,$$

dont les lignes focales auraient toujours été déterminées par la double équation

$$x\sqrt{b^2+c^2}\pm z\sqrt{a^2-b^2}=0\ ,$$

le calcul aurait été exactement le même ; de sorte qu'on a aussi le théorème suivant :

La somme ou la différence des angles que fait la droite génératrice de la surface conique du second ordre, dans chacune de ses situations, avec les deux lignes focales de cette surface est constante et égale à l'angle des deux droites qui résultent de la section de cette surface par le plan des lignes focales.

Si l'on conçoit une sphère, de rayon quelconque, ayant son centre au sommet ou centre de la surface conique, les deux nappes de cette surface détermineront sur la sphère deux courbes fermées, égales et opposées, et les deux lignes focales perceront cette sphère en quatre points, situés sur la circonférence du grand cercle qui coupera les deux courbes en deux parties égales. Ces points diviseront cette circonférence en quatre arcs dont les opposés seront égaux, et les milieux de ces arcs seront symétriquement situés par rapport aux deux courbes, dont ils pourront être considérés comme les centres sphériques. En ne considérant que l'une des courbes et les points de son intérieur par où passent les lignes focales de la surface conique, on pourra appeler cette courbe une *ellipse sphérique*, dont ces deux mêmes points seront les *foyers*. On pourra, au contraire, ne considérer que les parties des deux courbes les plus voisines l'une de l'autre, et appeler l'ensemble de ces deux parties une *hyperbole sphérique*, laquelle aura pour *foyers* les foyers des deux courbes les plus voisins de leurs sommets. En appelant en outre, *rayons vecteurs* les arcs de grands cercles qui joignent les différens points de l'une ou l'autre courbe à l'un des quatre foyers, on aura les deux théorèmes suivans :

La somme des deux rayons vecteurs des différens points d'une ellipse sphérique est constante et égale à la longueur du diamètre de cette courbe qui contient ses deux foyers.

La différence des deux rayons vecteurs des différens points d'une hyperbole sphérique est constante et égale à la longueur du diamètre de cette courbe qui contient ses deux foyers.

Si, le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole sphérique restant fixe, on conçoit que le centre de la sphère s'en éloigne continuel-

lement, en suivant constamment la direction du rayon qui passe par ce point, la surface de cette sphère tendra sans cesse à devenir plane, et le deviendra en effet, lorsque son rayon sera devenu infini; mais alors les rayons vecteurs des deux courbes deviendront des lignes droites, de sorte qu'on parviendra ainsi aux propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole ordinaires, lesquelles ne sont ainsi, comme on le voit, qu'un cas particulier des propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole sphériques.

§. II.

Soit (x',y',z') un des points de la surface conique donnée par l'équation

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0\ ;$$

le plan tangent (T) à cette surface en ce point aura pour équation

$$b^2c^2x'x+a^2c^2y'y-a^2b^2z'z=0\ ; \qquad \text{(T)}$$

il touchera d'ailleurs la surface conique suivant une génératrice (G).

Conduisons présentement, par cette génératrice et par les deux lignes focales (F,F'), deux plans (V,V') que nous appellerons *plans vecteurs*; l'équation commune à ces deux plans sera

$$y'x\sqrt{b^2+c^2}-\left[x'\sqrt{b^2+c^2}\mp z'\sqrt{a^2-b^2}\right]y\mp y'z\sqrt{a^2-b^2}=0\ ; \qquad \binom{V}{V'}$$

en désignant par θ, θ' les angles dièdres que forment ces deux plans avec le plan tangent, on trouvera

$$\text{Cos.}\theta=\pm\frac{y'\left[a^2z'\sqrt{b^2+c^2}-c^2x'\sqrt{a^2-b^2}\right]\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{(b^4c^4x'^2+a^4c^4y'^2+a^4b^4z'^2)\left[(b^2+c^2)x'^2+(a^2+c^2)y'^2+(a^2-b^2)z'^2-2x'z'\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}\right]}}\,.$$

$$\text{Cos.}\theta'=\mp\frac{y'\left[a^2z'\sqrt{b^2+c^2}+c^2x'\sqrt{a^2-b^2}\right]\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{(b^4c^4x'^2+a^4c^4y'^2+a^4b^4z'^2)\left[(b^2+c^2)x'^2+(a^2+c^2)y'^2+(a^2-b^2)z'^2+2x'z'\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}\right]}}\,.$$

Or, le point (x', y', z') étant sur la surface conique, on doit avoir

$$b^2c^2x'^2+a^2c^2y'^2-a^2b^2z'^2=0 .$$

Substituant, dans les dénominateurs de $\mathrm{Cos}\,\theta$ et $\mathrm{Cos}.\theta'$, la valeur de y'^2 tirée de cette dernière équation, on trouvera, en réduisant,

$$\pm\mathrm{Cos}.\theta=\mp\mathrm{Cos}.\theta'=\frac{acy'}{b}\sqrt{\frac{(b^2+c^2)(a^2-b^2)}{a^4(b^2+c^2)z'^2-c^4(a^2-b^2)x'^2}} ;$$

les cosinus de ces deux angles ne différant ainsi que par le signe, il en faut conclure qu'ils sont supplément l'un de l'autre, de sorte qu'on a ce théorème :

Le plan tangent à une surface conique du second ordre divise en deux parties égales deux des quatre angles dièdres formés par les deux plans vecteurs de la ligne de contact ; d'où il suit que les deux angles dièdres restants sont partagés en deux parties égales par le plan normal conduit suivant la même droite.

Donc aussi : *L'arc de grand cercle normal en l'un des points d'une ellipse sphérique et l'arc de grand cercle tangent en l'un des points d'une hyperbole sphérique partage en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs de ce point.*

Après être parvenus aux théorèmes que nous venons de démontrer, nous avons cherché si déjà ils n'auraient pas été publiés par d'autres ; et nous avons rencontré (*Nova acta Petropolitana*, tom. III) un mémoire de Fuss où il est question de la courbe qui est le lieu des sommets des triangles sphériques ayant base commune et la somme de leurs deux autres côtés constante. Il suit immédiatement de nos théorèmes que cette courbe n'est autre chose que l'intersection de la sphère avec une surface conique *du second ordre* ayant même centre qu'elle ; et que cette courbe est aussi le lieu des sommets des triangles sphériques, ayant base commune, dans lesquels la différence des deux autres côtés est cons-

tante, ce que Fuss n'a point remarqué. Il est en outre aisé de voir que cette courbe est une des lignes de courbure de la surface conique, l'autre étant la droite génératrice (*).

Berlin, le 19 mai 1825.

TRIGONOMÉTRIE.

Recherches sur les sommes de puissances semblables des sinus et cosinus des divisions de la circonférence ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Montpellier.

On sait que, k étant un nombre entier positif quelconque, on a

$$\left(\text{Cos.}\frac{2k\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2k\varpi}{m}\right)^m=\text{Cos.}2k\varpi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}2k\varpi=1\ ;$$

d'où il suit que les m racines de l'équation $x^m-1=0$ sont

(*) Suivant la remarque qui a été faite (tom. XV, pag. 302), au problème dont il vient d'être question, répond nécessairement à cet autre problème : *Quelle est l'enveloppe des bases de tous les triangles sphériques qui ont l'angle au sommet commun, et dans lesquels la somme ou la différence des deux autres angles est constante.* Sa résolution se réduit à ce qui suit : cherchez le lieu des sommets des triangles sphériques ayant base commune se terminant aux pôles des deux côtés de l'angle au sommet dont il s'agit, et dans lesquels la somme des deux autres côtés soit égale à une circonférence moins la somme constante des deux angles dont il s'agit, ou bien dans lesquels la différence des deux autres côtés soit égale à la différence de ces deux mêmes angles ; et ce lieu sera l'enveloppe demandée.

J. D. G.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Cos.}\,\frac{2\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2\varpi}{m}\,,\\
\text{Cos.}\,\frac{4\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{4\varpi}{m}\,,\\
\text{Cos.}\,\frac{6\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{6\varpi}{m}\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
\text{Cos.}\,\frac{2m\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2m\varpi}{m}\,,
\end{array}\right\}\quad(1)$$

donc, en vertu du même théorème, les n.^{mes} puissances de ces racines seront respectivement

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Cos.}\,\frac{2n\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2n\varpi}{m}\,,\\
\text{Cos.}\,\frac{4n\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{4n\varpi}{m}\,,\\
\text{Cos.}\,\frac{6n\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{6n\varpi}{m}\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
\text{Cos.}\,\frac{2mn\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2mn\varpi}{m}\,.
\end{array}\right\}\quad(2)$$

Mais, d'un autre côté, le théorème de Newton sur les sommes de puissances semblables des racines d'une équation quelconque, prouve que la somme des n.^{mes} puissances des racines de l'équation $x^m-1=0$ est égale à m, ou nulle, suivant que n est ou n'est pas multiple de m; donc, en supposant $n<m$, la somme des fonctions (2) doit être nulle, et conséquemment la partie réelle et la

partie imaginaire de cette somme doivent séparément s'anéantir. On a donc, pour $n<m$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos.}\frac{n}{m}.2\omega+\text{Cos.}2\frac{n}{m}.2\omega+\text{Cos.}3\frac{n}{m}.2\omega+\ldots+\text{Cos.}m.\frac{n}{m}.2\omega=0\,, \\ \text{Sin.}\frac{n}{m}.2\omega+\text{Sin.}2\frac{n}{m}.2\omega+\text{Sin.}3\frac{n}{m}.2\omega+\ldots+\text{Sin.}m.\frac{n}{m}.2\omega=0\,; \end{array}\right\} \quad (3)$$

c'est-à-dire,

La somme soit des sinus soit des cosinus de tous les multiples d'une fraction quelconque de la circonférence, à partir du sinus ou du cosinus de cet arc lui-même, jusqu'à autant de fois cet arc qu'il y a d'unités dans le dénominateur de la fraction dont il s'agit, est constamment égale à zéro.

Si, en particulier, on avait $n=m$, la somme des sinus serait encore nulle; mais la somme des cosinus serait alors égale à m. C'est d'ailleurs une chose manifeste, puisque chaque sinus serait nul, et chaque cosinus égal à l'unité.

On sait que, p étant un nombre entier positif quelconque on a

$$\text{Cos.}^p x=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}px+\frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)x+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}\text{Cos.}(p-4)x+.\right\},$$

pourvu que l'on s'arrête dès qu'on ne rencontrera plus d'arcs positifs, et que, quand p sera un nombre pair, on ne prenne que la moitié du terme qui contiendra l'arc nul. De cette formule on conclura, sous les mêmes conditions,

$$\text{Cos.}^p\frac{2\varpi}{m}=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}\frac{2p\varpi}{m}+\frac{p}{1}\text{Cos.}\frac{2(p-2)\varpi}{m}+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}\text{Cos.}\frac{2(p-4)\varpi}{m}+\ldots\ldots\right\},$$

$$\text{Cos.}^p\frac{4\varpi}{m}=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}\frac{4p\varpi}{m}+\frac{p}{1}\text{Cos.}\frac{4(p-2)\varpi}{m}+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}\text{Cos.}\frac{4(p-4)\varpi}{m}+\ldots\ldots\right\},$$

$$\text{Cos.}^p \frac{6p\pi}{m} = \frac{1}{2^{p-1}} \left\{ \text{Cos.} \frac{6p\pi}{m} + \frac{p}{1} \text{Cos.} \frac{6(p-2)\pi}{m} + \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \text{Cos.} \frac{6(p-4)\pi}{m} + \ldots \right\},$$

. . . . ;

$$\text{Cos.}^p \frac{2m\pi}{m} = \frac{1}{2^{p-1}} \left\{ \text{Cos.} \frac{2mp\pi}{m} + \frac{p}{1} \text{Cos.} \frac{2m(p-2)\pi}{m} + \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \text{Cos.} \frac{2m(p-4)\pi}{m} + \ldots \right\};$$

En prenant la somme de ces équations, on aura d'abord, par la première des équations (3),

$$\text{Cos.} \frac{2p\pi}{m} + \text{Cos.} \frac{4p\pi}{m} + \text{Cos.} \frac{6p\pi}{m} + \ldots\ldots + \text{Cos.} \frac{2mp\pi}{m} = 0,$$

$$\text{Cos.} \frac{2(p-2)\pi}{m} + \text{Cos.} \frac{4(p-2)\pi}{m} + \text{Cos.} \frac{6(p-2)\pi}{m} + \ldots\ldots + \text{Cos.} \frac{2m(p-2)\pi}{m} = 0,$$

$$\text{Cos.} \frac{2(p-4)\pi}{m} + \text{Cos.} \frac{4(p-4)\pi}{m} + \text{Cos.} \frac{6(p-4)\pi}{m} + \ldots\ldots + \text{Cos.} \frac{2m(p-4)\pi}{m} = 0,$$

. . . .

Quant à la somme des derniers termes des seconds membres, il faut distinguer deux cas, 1.° si p est impair, elle sera nulle, comme les autres, et l'on aura conséquemment, en changeant p en $2n+1$,

$$\left(\text{Cos.} \frac{2\pi}{m}\right)^{2n+1} + \left(\text{Cos.} \frac{4\pi}{m}\right)^{2n+1} + \left(\text{Cos.} \frac{6\pi}{m}\right)^{2n+1} + \ldots\ldots + \left(\text{Cos.} \frac{2m\pi}{m}\right)^{2n+1} = 0; \quad (4)$$

c'est-à-dire,

Si, ayant divisé une circonférence en un nombre quelconque de parties égales, on abaisse de tous les points de division des perpendiculaires sur un diamètre mené par l'un d'eux; la somme des puissances impaires d'un même degré quelconque des distances du centre aux pieds de ces perpendiculaires, prises avec leurs signes, sera égale à zéro.

2.° Si, au contraire, p est un nombre pair, les derniers cosinus seront égaux à l'unité et auront pour coefficient commun

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdots\cdots\frac{p-\frac{p-2}{2}}{\frac{p}{2}}\ ;$$

ou, en changeant p en $2n$

$$\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-2}{3}\cdots\cdots\frac{n+1}{n}\ ;$$

il faudra donc prendre m fois la moitié de l'un de ces coefficiens et multiplier le résultat par $\frac{1}{2^{p-1}}$ ou $\frac{1}{2^{2n-1}}$; ce qui reviendra à multiplier de suite ce coefficient par $\frac{m}{2^{2n}}$; on aura donc

$$\left(2\mathrm{Cos.}\frac{2\varpi}{m}\right)^{2n}+\left(2\mathrm{Cos.}\frac{4\varpi}{m}\right)^{2n}+\left(2\mathrm{Cos.}\frac{6\varpi}{m}\right)^{2n}+\cdots+\left(2\mathrm{Cos.}\frac{2m\varpi}{m}\right)^{2n}=m.\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdots\cdots\frac{n+1}{n}\ ; \quad (5)$$

c'est-à-dire,

Si, ayant divisé une circonférence en un nombre quelconque de parties égales, on abaisse de tous les points de division des perpendiculaires sur un diamètre mené par l'un d'eux ; la somme des puissances paires d'un même degré quelconque des doubles des distances du centre aux pieds de ces perpendiculaires sera égale à la même puissance du rayon, prise autant de fois que la circonférence aura de points de division et multipliée ensuite par autant d'unités qu'on peut faire de produits différens de moitié moins de facteurs qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance, avec autant de facteurs que cet exposant a d'unités.

On sait aussi que, quel que soit x, on a

$$\left(\text{Sin.}x\right)^{4n}=+\frac{1}{2^{4n-1}}\left\{\text{Cos.}4nx-\frac{4n}{1}\text{Cos.}(4n-2)x+\frac{4n}{1}\cdot\frac{4n-1}{2}\text{Cos.}(4n-4)x-\ldots\ldots\right\},$$

$$\left(\text{Sin.}x\right)^{4n+1}=+\frac{1}{2^{4n}}\left\{\text{Sin.}(4n+1)x-\frac{4n+1}{1}\text{Sin.}(4n-1)x+\frac{4n+1}{1}\cdot\frac{4n}{2}\text{Sin.}(4n-3)x-\ldots\ldots\right\},$$

$$\left(\text{Sin.}x\right)^{4n+2}=-\frac{1}{2^{4n+1}}\left\{\text{Cos.}(4n+2)x-\frac{4n+2}{1}\text{Cos.}4nx+\frac{4n+2}{1}\cdot\frac{4n+1}{2}\text{Cos.}(4n-2)x-\ldots\ldots\right\},$$

$$\left(\text{Sin.}x\right)^{4n+3}=-\frac{1}{2^{4n+2}}\left\{\text{Sin.}(4n+3)x-\frac{4n+3}{1}\text{Sin.}(4n+1)x+\frac{4n+3}{1}\cdot\frac{4n+2}{2}\text{Sin.}(4n-1)x-\ldots\ldots\right\};$$

pourvu qu'encore ici on arrête le développement dès qu'on aura plus d'arcs positifs, et que, dans les première et troisième formules, on ne prenne que la moitié du terme qui contient le cosinus de l'arç nul.

Si, dans chacune de ces formules, on substitue successivement pour x, comme ci-dessus, les arcs

$$\frac{2\pi}{m},\quad\frac{4\pi}{m},\quad\frac{6\pi}{m},\ldots\ldots\ldots\frac{2m\pi}{m},$$

et qu'en ayant égard aux formules (3) on prenne la somme des équations résultantes, on s'assurera que

$$\left(\text{Sin.}\frac{2\pi}{m}\right)^{2n+1}+\left(\text{Sin.}\frac{4\pi}{m}\right)^{2n+1}+\left(\text{Sin.}\frac{6\pi}{m}\right)^{2n+1}+\ldots\ldots+\left(\text{Sin.}\frac{2m\pi}{m}\right)^{2n+1}=0. \qquad (6)$$

et que

$$\left(2\text{Sin.}\frac{2\pi}{m}\right)^{2n}+\left(2\text{Sin.}\frac{4\pi}{m}\right)^{2n}+\left(2\text{Sin.}\frac{6\pi}{m}\right)^{2n}+\ldots\ldots+\left(2\text{Sin.}\frac{2m\pi}{m}\right)^{2n}=m.\frac{2n}{1}.\frac{2n-1}{2}\ldots\frac{n+1}{n}. \qquad (7)$$

ce qui revient à dire que *les deux théorèmes démontrés ci-dessus subsistent encore, en substituant aux distances du centre aux pieds des perpendiculaires les longueurs même de ces perpendiculaires.* La chose était manifeste pour le cas où m est multiple de quatre,

puisque les perpendiculaires ne sont que les distances du centre aux pieds des perpendiculaires abaissées des points de division sur un diamètre perpendiculaire au premier, lequel passe aussi alors par un point de division ; mais elle avait besoin d'être directetement établie pour les autres valeurs de m.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Suite de l'examen de quelques tentatives de théories des parallèles (*) ;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique.

Au Rédacteur des *Annales* ;

Monsieur,

Dans les notes dont vous avez bien voulu enrichir mes remarques sur quelques théories des parallèles, vous observez que je ne m'explique pas sur les théories dans lesquelles on considère l'angle, avec Bertrand de Genève, comme une portion de surface indéfinie. Je vais tâcher ici de réparer cette omission.

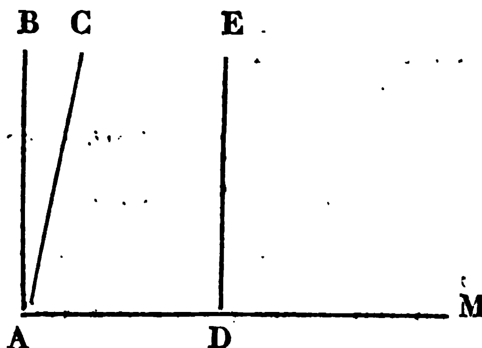
Les théories dont il s'agit peuvent se diviser en deux classes : dans les unes, on compare la surface angulaire à celle d'une bande

(*) Ceci fait suite à l'article de la page 77 du précédent volume.

J. D. G.

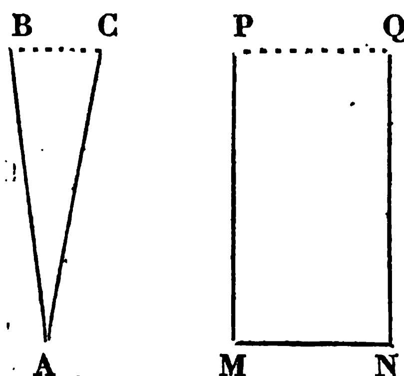
terminée par des perpendiculaires à une même droite, tandis que, dans les autres, on compare entre elles deux surfaces angulaires.

Voici, en peu de mots, de quelle manière on cherche à prouver que la surface indéfinie d'un angle, quelque petit qu'il soit, est toujours plus grande que celle d'une bande quelconque.



Soit BAC un angle arbitraire, regardé comme indéfini, et soient AB et DE des perpendiculaires indéfinies sur AM. En faisant tourner la surface angulaire BAC, alternativement et dans le même sens, autour de ses deux côtés, à commencer par AC, on pourra la répéter tant de fois qu'on voudra; et il ne faudra le faire qu'un nombre fini n de fois pour couvrir ou même pour excéder la surface angulaire indéfinie BAM. Mais si, au contraire, on fait tourner la bande BADE, alternativement et dans le même sens autour de ses deux côtés AB et DE, en commençant par ce dernier, quelque nombre fini de fois qu'on répète cette opération, on ne parviendra jamais à couvrir cette même surface angulaire BAM; donc, conclut-on, $n.\text{BAC} > n.\text{BADE}$; donc aussi $\text{BAC} > \text{BADE}$; ce qu'il fallait prouver.

Examinons présentement si ce raisonnement peut être admis.



Considérons un secteur circulaire BAC, de rayon variable, et un rectangle PMNQ, de base constante MN et de hauteur variable. La surface du secteur sera $\varpi\left(\frac{A}{360}\right).\overline{AB}^2$, et celle du rectangle MN.MP.

Supposons maintenant que l'on fasse croître le rayon AB suivant une progression dont la raison soit 2, et la hauteur MP du rectangle suivant une autre progression dont la raison soit 4; alors le $n.^{me}$ secteur aura pour expression $\varpi\left(\frac{A}{360}\right).\overline{AB}^2.2^{2n}$, et l'expression du $n.^{me}$ rectangle sera $MN.MP.2^{2n}$. En divisant la dernière surface par la première, on trouvera, pour leur rapport, la quantité constante $\left(\frac{360}{A}\right).\frac{MN.MP}{\varpi.\overline{AB}^2}$; et rien n'empêchera de prendre A ou MN de manière que le rapport devienne égal à l'unité et même plus grand. Or, si l'on suppose n infini, le $n.^{me}$ secteur deviendra une surface angulaire indéfinie, et le $n.^{me}$ rectangle deviendra une bande indéfinie; d'où je conclus qu'*une bande indéfinie peut, dans certain cas, être égale à une surface angulaire indéfinie, ou même être plus grande* (*).

(*) Tout le monde tombe d'accord, et M. Stein lui-même, sans doute, que si deux mobiles, partant ensemble d'un même point, parcourent une même droite, dans le même sens, l'un d'un mouvement uniforme et l'autre d'un mou-

Ce résultat, qui ne saurait être nié, est en contradiction manifeste avec les conséquences de la démonstration que nous avons rapportée; cette démonstration est donc nécessairement vicieuse, puisqu'elle tend à établir, *en général*, une propriété des surfaces angulaires et des bandes indéfinies qui n'a pas lieu sans restriction. On voit, en effet, que *l'exactitude du théorème dont il s'agit dépend essentiellement du rapport qu'ont entre elles les dimensions variables des deux surfaces que l'on compare*, rapport dont on ne saurait faire abstraction, bien qu'on suppose les surfaces infinies. Il faudra donc, avant d'employer la démonstration de Bertrand, se bien fixer sur le rapport que devront avoir, et constamment conserver les côtés de la surface angulaire et les hauteurs de la bande. Mais alors la démonstration est encore à créer; et comme, en supposant même les surfaces infinies, il faudra raisonner sur des figures d'une forme déterminée, on ne parviendra probablement pas au but sans être contraint d'emprunter, du moins implicitement, quelque chose de cette théorie des parallèles qu'on avait, au contraire, en vue d'établir (*).

---

vement uniformément accéléré; quelque grande que soit la vitesse constante du premier, et quelque petite que soit la force accélératrice qui sollicite le second; au bout d'un intervalle de temps fini et assignable, celui-ci parviendra inévitablement à devancer l'autre : de sorte que *l'espace indéfini parcouru par l'effet d'un mouvement uniformément accéléré est plus grand que l'espace indéfini parcouru par l'effet d'un mouvement uniforme*. Cependant, un raisonnement tout pareil à celui de M. Stein tendrait à infirmer cette proposition. Or, ce raisonnement peut-il être, à la fois, fautif ici et exact ailleurs? Nous en appellons, sur cette question, à M. Stein lui-même.

J. D. G.

(*) En adoptant les idées de Bertrand, dont nous sommes loin d'ailleurs de nous dissimuler les inconvéniens, et que Bertrand lui-même n'a peut-être admises qu'en désespoir de cause, on pourrait éluder la comparaison des bandes aux espaces angulaires, en procédant comme il suit : On ferait d'abord remarquer que l'angle droit vaut le quart d'un plan, et que l'angle aigu est moindre, et l'angle obtus plus grand que l'angle droit. On remarquerait ensuite que, si une

Discutons présentement les démonstrations où l'on compare entre elles deux surfaces angulaires.

Ces démonstrations reposent toutes sur cette proposition fondamentale que *deux angles sont entre eux comme les espaces angulaires indéfinis compris entre leurs côtés*. Or, il est d'abord facile de voir que cela ne saurait être généralement et rigoureusement vrai qu'autant qu'on supposera, tacitement du moins, que ces espaces angulaires sont des secteurs circulaires de rayons égaux, quoiqu'infinis. Mais alors toutes les démonstrations que l'on a appuyées jusqu'ici sur la proposition fondamentale que nous venons de rappeler, ne sauraient être admises sans subir des modifications qui sont encore à trouver, et qui ne permettront probablement plus de les rendre indépendantes de la théorie des parallèles. Si, par exemple, au lieu de faire voir que la somme des trois angles d'un triangle vaut deux angles droits, ainsi qu'on l'a fait dans un des premiers volumes des *Annales* (*), on voulait procéder suivant

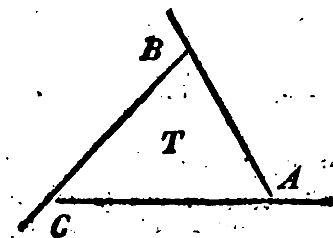
---

perpendiculaire et une oblique à une même droite pouvaient ne pas se rencontrer, il arriverait cette double absurdité qu'un angle obtus serait entièrement contenu dans un angle droit et un angle droit dans un angle aigu.

Nous sentons bien qu'on nous objectera, sur-le-champ, qu'un angle droit peut excéder un autre angle droit d'une quantité même infinie ; mais, comme d'ailleurs deux angles droits peuvent se convenir parfaitement, nous en tirerons cette conséquence, que nous ne serons plus dès lors tenus de prouver, savoir, que cette quantité, bien qu'infinie doit être réputée nulle, par rapport à l'angle droit.

J. D. G.

(*) La démonstration que rappelle ici M. Stein peut être beaucoup simplifiée, en la présentant ainsi qu'il suit :



la remarque qui vient d'être faite, relativement à la figure des surfaces angulaires indéfinies; voici, à peu près, ce qu'on pourrait dire de plus plausible : par un point pris arbitrairement dans l'intérieur du triangle, décrivons un cercle d'un rayon infiniment grand, par rapport aux dimensions de ce triangle. On pourra alors réputer indistinctement comme centre de ce cercle chacun des sommets du triangle; donc ses angles pourront être considérés comme des angles au centre, ou comme des secteurs composant ensemble le demi-cercle; donc, leur somme sera égale à deux angles droits.

Mais ce raisonnement peut-il être regardé comme rigoureux? On sait fort bien qu'une longueur finie disparaît devant une longueur infinie, lorsqu'on ne considère que les rapports des lignes; mais ce n'est point de ces rapports, mais des propriétés des angles qu'il s'agit ici. Le raisonnement que nous venons d'employer suppose

---

Soient prolongés dans le même sens les trois côtés d'un triangle T, et soient A, B, C ses angles extérieurs; en représentant par D l'angle droit, on aura évidemment

$$A+B+C+T=4D,$$

d'où

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=4-\frac{T}{D},$$

or, la fraction $\frac{T}{D}$, dont le numérateur est fini et le dénominateur infini, doit être réputée nulle, vis-à-vis des autres termes de l'équation; de sorte qu'on doit avoir simplement

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=4 \quad \text{ou} \quad A+B+C=4D,$$

c'est-à-dire que *la somme des angles extérieurs de tout triangle vaut quatre angles droits*; d'où il est facile de conclure que *la somme de ses angles intérieurs en vaut deux*.

J. D. G.

donc implicitement que les angles d'une figure ne dépendent que des rapports des lignes qui la terminent, et non de leur grandeur absolue; proposition vraie, mais seulement comme conséquence du principe de similitude, dont la démonstration suppose la théorie des parallèles antérieurement établie (*).

(*) C'est sans doute une chose très-fâcheuse qu'après plus de deux mille ans d'efforts et de tentatives, on n'ait pu encore parvenir à démontrer les propositions fondamentales de la théorie des parallèles d'une manière satisfaisante pour tout le monde; car on a vu ailleurs (tom. X, pag. 161) que les démonstrations fondées sur l'emploi de l'algorithme fonctionnel, sur le mérite desquelles M. Stein ne s'explique pas, sont elles-mêmes sujettes à des objections assez graves.

Lorsqu'une droite indéfinie tourne sur un point d'une autre droite indéfinie, sans quitter le plan qui les contient, elle peut prendre, par rapport à celle-ci, deux situations principales très-remarquables; savoir: celle où elle se confond avec elle, et celle où elle fait avec elle, de part et d'autre, deux angles égaux. Il est de soi-même manifeste que la première de ces deux situations est unique; et il est à peu près aussi clair que l'autre l'est également, qu'il est clair qu'une même longueur ne saurait avoir deux milieux.

Que si la droite mobile tourne sur un point situé hors de la direction de la droite fixe, elle ne pourra plus se confondre avec elle; mais elle pourra encore, comme dans le premier cas, faire avec elle des angles égaux, ou bien elle pourra ne point la rencontrer, quelque loin et dans quelque sens qu'on la prolonge; et on démontre très-nettement que chacune de ces deux situations est possible. Mais, tandis qu'on démontre en outre, très-nettement et très-brièvement, de la première qu'elle est unique, on ne peut parvenir à le démontrer de la seconde; c'est-à-dire, que, tandis qu'on démontre très-bien que, dans un même plan, *on ne peut mener qu'une seule droite par un point donné qui fasse des angles égaux avec une autre droite donnée*; on ne peut démontrer que, *par un point donné hors d'une droite, on ne peut mener, dans le plan qui contient l'un et l'autre, plus d'une droite qui ne la rencontre pas*; et c'est en cela que consiste toute la difficulté de la théorie des parallèles.

Aussi long-temps donc qu'on ne sera pas parvenu à tirer cette dernière proposition de la définition des parallèles, par une déduction logique rigoureuse, il faudra se résigner à admettre sans démonstration soit cette proposition, soit, à l'exemple d'Euclide, quelque autre proposition de laquelle celle-là puisse être

Il ne me paraît donc pas possible de fonder solidement cette théorie sur les principes de Bertrand de Genève; et j'observerai, en général, sur les démonstrations qui emploient la considé-

---

déduite. Or, comme, parmi ces dernières, nous n'en voyons aucune, sans en excepter celle d'Euclide, qui le cède en évidence avec la proposition dont il s'agit, nous inclinerions fort à lui donner la préférence sur toutes les autres. Dans tous les cas, il faudrait, en déplaçant la difficulté, éviter surtout de la rendre plus grave.

C'est en particulier, ce qui arriverait si, comme quelques géomètres l'ont proposé, dans ces derniers temps, à l'exemple de Carnot, on admettait, sans démonstration, le principe de similitude. On pourrait, en effet, opposer aux partisans de cette doctrine le dilemme que voici; où vous n'avez d'autre but que de faire disparaître ou du moins de déguiser la difficulté que présente la théorie des parallèles, et alors il faut que vous admettiez que cette proposition: *Une figure étant donnée, on peut toujours en concevoir une autre, de telle grandeur on voudra, qui lui soit parfaitement semblable*, est plus simple et plus évidente que celle-ci: *Par un même point donné, on ne peut faire passer qu'une seule parallèle à une même droite donnée*; et vous trouverez probablement peu de personnes de votre avis sur ce point, où bien vous trouvez le principe de similitude d'une telle évidence, que vous n'hésiteriez pas à l'admettre, comme axiome, lors même qu'indépendamment de ce principe, la théorie des parallèles se trouverait mise tout-à-fait hors d'atteinte, et alors vous serez désavoués par beaucoup de géomètres qui pensent que, bien loin de multiplier les axiomes, on doit, au contraire, ne rien négliger pour les réduire au moindre nombre possible, afin de faire, autant qu'il se pourra, de la géométrie une science de définitions et de déductions logiques, et qui, dans cette vue, s'appliquent même à démontrer soigneusement une multitude de propositions qui pourraient, à bon droit, passer pour beaucoup plus évidentes que le principe dont il s'agit.

Remarquons bien en outre que cette proposition: *Une figure étant donnée, on peut toujours en concevoir une autre, de telle grandeur on voudra, qui lui soit parfaitement semblable*, pourra être indistinctement vraie ou fausse, suivant l'acception, très-libre d'ailleurs, qu'on voudra attacher au mot *semblable*; et qu'aussi long-temps que cette acception n'aura pas été nettement fixée, la proposition, si tant est qu'elle puisse alors signifier quelque chose, sera du moins fort loin d'avoir ce sens précis qui seul pourrait lui mériter de trouver place dans des élémens de la science exacte par excellence.

ration de l'infini, qu'*une proposition sur des quantités infinies ne saurait mériter notre assentiment, qu'autant qu'elle est réductible à une proposition sur des limites de quantités finies variables*. Si

---

Il s'en faut bien, en effet, que le mot *similitude*, ainsi que ses dérivés et composés soient de ces mots sur la signification desquels tout le monde est parfaitement d'accord, et dont on puisse conséquemment se dispenser d'expliquer la signification; car, par exemple, tandis que quelques-uns emploient fréquemment le mot *semblable* comme l'équivalent du mot *pareil*, et confondent ainsi, dans leur esprit, la similitude avec l'égalité; d'autres au contraire trouvent une *similitude parfaite* entre un objet en relief et des traits de crayons appliqués sur une surface plane, entre un homme et son portrait, par exemple. Il sera donc indispensable de n'introduire le mot *semblable*, dans les élémens de géométrie, qu'après en avoir bien circonscrit et précisé l'acception; et nous ne voyons pas trop comment on s'y prendra, en considérant surtout qu'il faudra en expliquer le sens dès le début, et de manière à se rendre parfaitement intelligible à des esprits qui n'auront presque encore aucune notion acquise sur les propriétés de l'étendue. La chose sera d'autant plus difficile que la notion générale de la similitude, telle qu'on la conçoit en géométrie, est une notion extrêmement complexe, et qui entraîne même une infinité de conditions, dès que les objets que l'on compare sont terminés par des lignes ou des surfaces courbes.

Nous remarquerons, à ce sujet, que la manière dont on a coutume de présenter la similitude en géométrie, sans doute dans la vue de conserver une plus parfaite symétrie, est vicieuse en ce qu'elle implique plusieurs théorèmes. Nous ne voyons pas pourquoi on ne préférerait pas de s'y prendre de la manière suivante: Soient des points P, P', P'', ... en nombre fini ou infini, isolés les uns des autres, ou se succédant sans interruption dans l'espace; et soit un point O situé d'une manière quelconque par rapport à eux. Soient prises sur les droites OP, OP', OP'', ... des longueurs Op, Op', Op''.... qui leur soient respectivement proportionnelles, et alors le système des points p, p', p''....... sera dit semblable au système de points P, P', P''......... En outre deux systèmes d'un même nombre de points Q, Q', Q''....... et q, q', q'',... de quelque manière d'ailleurs qu'ils soient situés dans l'espace, l'un par rapport à l'autre, seront dits *semblables* si, par le procédé qui vient d'être indiqué, on peut déduire du premier un système *égal* au second. Il y aurait beaucoup d'avantage à présenter le principe de similitude de cette manière large qui, indépendamment de sa forme symétrique, a l'avantage de n'impliquer aucun théo-

donc on veut discuter un raisonnement qui porte sur des quantités infinies, on commencera d'abord par chercher à le traduire en un raisonnement sur des limites. Par ce moyen, on ne manquera guère ou de présenter la chose d'une manière plus claire et plus rigoureuse, ou d'en faire ressortir les défauts. C'est ainsi, en particulier, que j'en ai usé dans la discussion qui précède, et je crois pouvoir affirmer que tous ceux qui voudront user de cette recette auront lieu de s'en louer.

Agréez, etc.

Trèves, le 20 mars 1825.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Essai sur les limites des racines des équations littérales;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.



Les analistes ont donné des méthodes diverses à l'aide desquelles on détermine les limites des racines réelles des équations numériques; mais il n'est pas à notre connaissance qu'aucun d'eux se soit occupé du même problème relativement aux équations littéra-

---

rème. Ce n'est pas là, au surplus, le seul côté par lequel les élémens pourraient être améliorés. Mais on trouve plus court et plus commode de calquer à peu près les traités élémentaires les uns sur les autres; et voilà pourquoi, tandis que tant d'autres branches de la science s'étendent et se simplifient sans cesse, les traités élémentaires de géométrie sont encore aujourd'hui à peu près tels qu'ils étaient au temps d'Euclide.

J. D. G.

les. Nous allons montrer comment il peut être résolu pour ces dernières, du moins lorsqu'elles sont d'un dégré impair, ou, lorsqu'étant d'un degré pair, elles ont leur dernier terme négatif.

§. I.

Equations de degrés impairs.

Soit l'équation du 3.me degré, sans second terme;

$$x^3+px+q=0. \qquad (1)$$

Posons

$$x^3+px+q=3P(x+a)^2\,; \qquad (2)$$

a et P étant deux indéterminées. Il est clair que, quelles que soient a et P, toute valeur de x qui satisfera à l'équation (2), substituée dans le premier membre de (1) donnera un résultat de même signe que P; de sorte que toute valeur réelle de x, dans (1), est nécessairement comprise, quelle que soit a, entre deux valeurs de x dans (2) répondant à des valeurs de P de signes contraires. Tout se réduit donc à profiter de l'indétermination de a, pour rendre cette équation (2) facilement résoluble.

En développant, transposant et ordonnant, elle devient

$$x^3-3Px^2+(p-6aP)x-(3a^2P-q)=0. \qquad (3)$$

Or, si l'on pose

$$p-6aP=3P^2\,, \qquad \text{d'où} \qquad a=\frac{3P^2+p}{6P}\,;$$

cette équation devient

$$(x-P)^3+(P^3-3a^2P+q)=0\,;$$

ou, en mettant pour a sa valeur,

$$(x-P)^3+\frac{3P^4-6pP^2+12qP-p^2}{12P}=0\ ;$$

ce qui donne, sur-le-champ,

$$x=P-\sqrt[3]{\frac{3P^4-6pP^2+12qP-p^2}{12P}}. \qquad (4)$$

En changeant P en $-P'$, cette formule devient

$$x=-P'+\sqrt[3]{\frac{3P'^4-6pP'^2-12qP'-p^2}{12P'}}. \qquad (5)$$

Ainsi, quelques valeurs positives qu'on prenne pour P et P', les valeurs de x données par les formules (4) et (5), substituées dans le premier membre de l'équation (1), donneront nécessairement des résultats de signes contraires, et comprendront conséquemment entre elles une racine au moins de cette équation.

Soit, en second lieu, l'équation du 5.me degré, sans second terme,

$$x^5+px^3+qx^2+rx+s=0. \qquad (1)$$

Posons

$$x^5+px^3+qx^2+rx+s=5P(x^2+ax+b)^2+Q(x+c)^2\ ; \qquad (2)$$

P, Q, a, b, c étant indéterminées, et P et Q étant supposés de mêmes signes. Il est clair que toute valeur de x tirée de (2) donnera, par sa substitution dans le premier membre de (1), un résultat de même signe que P et Q; de sorte que toute valeur réelle de x dans (1) sera nécessairement comprise, quelles que soient d'ailleurs a, b, c, entre deux valeurs de x dans (2) répondant à deux systèmes de valeurs de P et Q de signes contraires. Tout

se réduit donc à profiter de l'indétermination de a, b, c pour rendre cette équation (2) facilement résoluble.

En développant, transposant et ordonnant, elle devient

$$\left.\begin{array}{r} x^5-5Px^4-10Pa \\ +p \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^3-10Pb \\ -5Pa^2 \\ -Q \\ +q \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^2-2Qc \\ -10Pab \\ +r \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x-5Pb^2 \\ -Qc^2 \\ +s \end{array}\right| =0. \qquad (3)$$

Or, si l'on pose

$$-10Pa+p=10P^2,$$

$$-10Pb-5Pa^2-Q+q=-10P^3,$$

$$-2Qc-10Pab+r=5P^4;$$

ce qui donnera

$$a=\frac{p-10P^2}{10P},$$

$$b=\frac{100P^4+20pP^2-20PQ+20qP-p^2}{200P^2},$$

$$c=\frac{199pP^4-200P^3Q+200qP^3-10(3p^2-20r)P^2+20pPQ-20pqP+p^3}{400P^2Q};$$

elle deviendra

$$(x-P)^5+(P^5-5b^2P-c^2Q+s)=0,$$

dans laquelle présentement on peut regarder a, b, c comme connus et qui donne

$$x=P-\sqrt[5]{P^5-5b^2P-c^2Q+s}\,.$$

En donnant donc tour à tour à P et Q, dans cette formule d'abord des valeurs positives quelconques, puis des valeurs négatives également quelconques, les valeurs qui en résulteront pour x, comprendront entre elles une racine, au moins de l'équation proposée.

On voit, par ce qui précède que, dans le 7.me degré il faudrait poser

$$x^7+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx+u$$

$$=7P(x^3+ax^2+bx+c)^2+Q(x^2+dx+e)^2+R(x+f)^2\,,$$

et supposer que les indéterminées P, Q, R sont toutes trois positives ou toutes trois négatives. On poserait des équations analogues pour les degrés supérieurs.

§. II.

Équations de degrés pairs.

En supposant constamment le dernier terme négatif, soit d'abord l'équation du second degré

$$x^2+px-q=0\,, \qquad (1)$$

Posons

$$x^2+px-q=(x+a)^2\,, \qquad (2)$$

a étant une indéterminée. Il est clair que toute valeur de x tirée de cette dernière équation et substituée dans le premier membre

de (1) donnera un résultat positif ; et, comme la valeur o donne le résultat négatif $-q$, il s'ensuit qu'il y aura entre o et la valeur dont il s'agit une racine réelle de l'équation (1).

En développant, transposant et réduisant, l'équation (2) devient

$$(p-2a)x=a^2+q,$$

d'où

$$x=\frac{a^2+q}{p-2a};$$

de sorte que, quelque valeur positive ou négative qu'on donne à l'indéterminée a, une des racines de l'équation (1) sera toujours comprise entre o et la valeur qui en résultera pour x.

Soit, en second lieu, l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^3+qx^2+rx-s=0. \qquad (1)$$

Posons

$$x^4+px^3+qx^2+rx-S=(x^2+ax+b)^2+P(x+c)^2, \quad (2)$$

a, b, c, P étant des indéterminées. Il est clair que, quels que soient les signes de a, b, c, pourvu qu'on prenne P positif, toute valeur de x tirée de l'équation (2) et substituée dans le premier membre de (1) donnera un résultat positif ; et comme, d'un autre côté, la substitution de o dans ce même premier membre donne le résultat négatif $-s$, il s'ensuit que l'équation (1) aura au moins une racine réelle entre o et cette valeur de x.

En développant, transposant, réduisant et ordonnant, l'équation (2) devient

$$\begin{array}{r|c|c|c|l}
2a & x^3+2b & x^2+2Pc & x+b^2 & =0\,. \qquad (3) \\
-p & +a^2 & +2ab & +Pc^2 & \\
 & +P & -r & +s & \\
 & -q & & &
\end{array}$$

En posant

$$2a-p=0\,,$$

$$2b+a^2+P-q=0\,,$$

$$2Pc+2ab-r=0\,;$$

ce qui donne

$$a=\frac{p}{2}\,,$$

$$b=-\frac{4P+(p^2-4q)}{8}\,,$$

$$c=\frac{4pP+(p^3-4pq+8r)}{16P}\,,$$

l'équation (3) deviendra simplement

$$(2Pc+2ab-r)x+(b^2+Pc^2+s)=0\,;$$

dans laquelle présentement on peut regarder a, b, c comme connus, et qui donne

$$x=-\frac{b^2+Pc^2+S}{2Pc+2ab-r}\,.$$

En prenant donc pour P un nombre positif quelconque, il y aura entre o et la valeur qui en résultera pour x une racine au moins de l'équation (1).

On voit, par ce qui précède, que, pour le sixième degré, il faudrait poser

$$x^6+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx-u$$

$$=(x^3+ax^2+bx+c)^2+P(x^2+dx+e)^2+Q(x+f)^2,$$

et supposer positives les deux indéterminées P et Q. On poserait des équations analogues pour les degrés supérieurs.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Théorèmes sur les polygones;

Par M. C. C. Gerono.

THÉORÈME. *Si, par un point quelconque de l'espace, on conduit des droites de longueur arbitraire, respectivement parallèles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche ; ce point sera le centre de gravité d'un système de masses placées aux extrémités de ces droites, et respectivement proportionnelles aux rapports des longueurs des droites aux extrémités desquelles elles se trouvent situées aux longueurs des côtés du polygone auxquels ces droites sont parallèles.*

Démonstration. Soient représentés par P, P', P'', ... les poids dont il s'agit, et par r, r', r'', ... les longueurs des droites aux

extrémités desquelles ils se trouvent situés ; les longueurs des côtés du polygone respectivement parallèles, pourront évidemment être représentées par $\frac{P}{p}r$, $\frac{P'}{p}r'$, $\frac{P''}{p}r''$, ..., p étant un poids choisi d'une manière convenable. Si de plus on désigne par α, α', α'', ... les angles que forment les directions des côtés du polygone, et conséquemment les droites r, r', r'', ... avec une droite fixe arbitraire, on aura, comme M. Sturm l'a démontré (tom. XV pag. 310).

$$\frac{P}{p}r\text{Cos}.\alpha+\frac{P'}{p}r'\text{Cos}.\alpha'+\frac{P''}{p}r''\text{Cos}.\alpha''+......=0\,,$$

ou simplement

$$Pr\text{Cos}.\alpha+P'r'\text{Cos}.\alpha'+P''r''\text{Cos}.\alpha''+.......=0\,.$$

Or, si par le point de départ des droites r, r', r'', ... on conduit un plan perpendiculaire à la droite fixe, cette dernière équation exprimera que la somme des momens des masses P, P', P'', ... est nulle par rapport à ce plan. Mais, comme la direction de la droite fixe est arbitraire, celle du plan l'est aussi ; donc la somme des momens des masses P, P', P'', ... est nulle, par rapport à tout plan passant par le point de départ des droites r, r', r''; ... donc enfin ce point est le centre de gravité de ces masses, comme l'annonce le théorème.

Pour que les masses P, P', P'', ... puissent être égales entre elles, il faut évidemment que les longueurs arbitraires r, r', r'', ... soient proportionnelles aux côtés correspondans du polygone, c'est-à-dire que, *si par un point quelconque de l'espace, on conduit des droites parallèles proportionnelles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche ; ce point sera le centre de gravité d'un système de masses égales placées aux extrémités de ces droites.* Ce théorème a été démontré par M. Sturm (tom. XV, pag. 313).

Si les droites arbitraires r, r', r'', ... sont d'une même longueur quelconque, les masses P, P', P'', ... devront être évidemment proportionnelles aux côtés correspondans du polygone; c'est-à-dire que, *si, par un point quelconque de l'espace, on conduit des droites égales, respectivement parallèles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche; ce point sera le centre de gravité d'un système de masses proportionnelles aux longueurs des côtés du polygone, placées aux extrémités de ces droites.* Ce théorème a été démontré par M. Sturm (tom. XV, pag. 315).

Ainsi notre théorème renferme les deux théorèmes de M. Sturm, comme cas particuliers.

Si le polygone est plan, et que, d'un point pris dans son intérieur, on mène des droites qui fassent dans le même sens des angles égaux quelconques avec ses côtés; il est évident que, le point et les droites demeurant fixes, on pourra toujours faire tourner le polygone sur leur plan, de telle sorte que ses côtés deviennent respectivement parallèles à ces mêmes droites qui conséquemment pourront être prises pour celles dont il est question dans l'énoncé du théorème.

De là on peut conclure, en particulier, que, *un polygone plan étant circonscrit à un cercle, le centre du cercle sera le centre de gravité d'un système de masses proportionnelles aux longueurs des côtés du polygone et placées respectivement aux points de contact de ces côtés avec la circonférence.*

Du château des Tuileries, le 21 avril 1825.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème d'Analise.

En désignant par p et q deux nombres entiers positifs quelconques, on a toujours

$$1+\frac{p}{1}\cdot\frac{q}{1}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{q-1}{2}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q-2}{3}+\ldots$$

$$=\frac{p+q}{1}\cdot\frac{p+q-1}{2}\cdot\frac{p+q-2}{3}\cdot\frac{p+q-3}{4}\ldots$$

Théorème de Géométrie.

Un polygone quelconque étant circonscrit à un cercle, et un autre cercle étant concentrique à celui-là ; la somme des produits des côtés du polygone par les quarrés des distances d'un point quelconque de la circonférence du second cercle aux points de contact de ces côtés avec le premier, est une quantité constante.

OPTIQUE.

Solution de divers problèmes d'optique ;

Par M. Gergonne.



Après avoir étudié, dans deux précédens articles (*), les lois générales qui régissent les rayons de la lumière, soit dans leur réflexion soit dans leur réfraction ; nous allons, suivant l'engagement que nous en avons pris, faire l'application de ces lois à quelques exemples choisis ; en nous bornant, pour le présent, au cas où tout se passe dans un plan, lequel embrasse aussi plusieurs cas de réflexion et de réfraction à la rencontre des surfaces de révolution ; et en renvoyant, pour un prochain article, les problèmes dont la résolution exige inévitablement la considération des trois dimensions de l'espace.

I. Rappelons d'abord sommairement le théorème fondamental, et établissons les équations générales qui s'en déduisent, et qui doivent servir à la résolution des problèmes que nous avons dessein de nous proposer. Ce théorème consiste simplement en ce que : *à chaque trajectoire orthogonale des rayons incidens, il répond toujours une trajectoire orthogonale des rayons réfractés telle que, de quelque point de la courbe séparatrice que l'on mène des normales à ces deux trajectoires, les longueurs de ces normales se-*

(*) Voy. la page 345 du précédent volume et la page 1.re de celui-ci.



ront respectivement entre elles dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

Soient donc $(t\,,\,u)$ un quelconque des points de la courbe séparatrice, $(x'\,,\,y')$ et $(x\,,\,y)$ les pieds des normales abaissées de ce point sur les deux trajectoires; et supposons que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction soit celui de λ' à λ; on aura d'abord

$$\frac{(t-x)^2+(u-y)^2}{\lambda^2}=\frac{(t-x')^2+(u-y')^2}{\lambda'^2}\,. \qquad (1)$$

De plus, parce que les droites menées du point $(t\,,\,u)$ aux deux autres sont respectivement normales aux courbes auxquelles elles se terminent, on aura aussi

$$(t-x)\mathrm{d}x+(u-y)\mathrm{d}y=0\,,\ (2) \qquad (t-x')\mathrm{d}x'+(u-y')\mathrm{d}y'=0\,,\ (2')$$

différentiant ensuite la première de ces trois équations, et ayant égard aux deux autres, on trouvera en outre

$$\frac{(t-x)\mathrm{d}t+(u-y)\mathrm{d}u}{\lambda^2}=\frac{(t-x')\mathrm{d}t+(u-y')\mathrm{d}u}{\lambda'^2}\,; \qquad (3)$$

équation évidemment comportée par les trois autres; mais qu'on pourra substituer avec avantage à l'une ou à l'autre des équations (2) et (2′), lorsque la courbe séparatrice sera donnée. On voit que, dans ce système d'équations, x, y et λ figurent de la même manière que x', y' et λ'; et l'on n'aura pas lieu d'en être surpris, si l'on considère que, le rayon réfracté étant pris pour rayon incident, celui-ci devient rayon réfracté, et *vice versâ*. Il en résulte que, la courbe séparatrice étant donnée, le problème où l'on cherche la trajectoire orthogonale des rayons incidens, à l'aide de celle des rayons réfractés n'est pas différent de celui où il s'agit de déterminer cette dernière quand l'autre est donnée.

Enfin les coordonnées de nos trois points doivent être liées par un égal nombre d'équations en t et u, x et y, x' et y', lesquelles ne sont autres que les équations même de nos trois courbes, équations que nous représenterons respectivement par

$$S=0\,, \qquad (4)$$

$$T=0\,, \quad (5) \qquad T'=0\,, \quad (5')$$

la première appartenant à la courbe séparatrice, et les deux autres aux deux trajectoires.

Lorsque, cette courbe séparatrice étant donnée, on demandera de déterminer l'une des trajectoires par l'autre, il ne s'agira, pour cela, que d'éliminer ou les quatre quantités t, u, x', y', entre les cinq équations (1), (2'), (3), (4), (5'), ou bien les quatre quantités t, u, x, y, entre les cinq équations (1), (2), (3), (4), (5); et l'équation résultante en x et y ou en x' et y', sera l'équation de la trajectoire cherchée.

Si, au contraire, il s'agit de déterminer la séparatrice, au moyen des deux trajectoires, on y parviendra en éliminant x, y, x', y', entre les cinq équations (1), (2), (2'), (5), (5'); ce qui conduira à une équation en t et u, qui sera celle de la courbe demandée.

Quant aux problèmes relatifs à la réflexion, on les résoudra à l'aide des mêmes formules, en y posant préalablement $\lambda+\lambda'=0$.

II. Dans les applications qui vont suivre, nous supposerons constamment que les rayons incidens émanent d'un même point, que nous prendrons constamment pour origine des coordonnées rectangulaires. Nous aurons ainsi les deux équations,

$$x'=0\,, \qquad y'=0\,,$$

qui remplaceront l'équation (5'), ainsi que l'équation (2'), qui

sera alors satisfaite d'elle-même. Nous n'aurons donc plus à nous occuper que des autres, lesquelles deviendront alors

$$\frac{(t-x)^2+(u-y)^2}{\lambda^2}=\frac{t^2+u^2}{\lambda'^2}\,, \qquad (\alpha)$$

$$(t-x)\mathrm{d}x+(u-y)\mathrm{d}y=0\,, \qquad (\beta)$$

$$\frac{(t-x)\mathrm{d}t+(u-y)\mathrm{d}u}{\lambda^2}=\frac{t\mathrm{d}t+u\mathrm{d}u}{\lambda'^2}\,, \qquad (\gamma)$$

$$T=0\ , \quad (\delta) \qquad\qquad S=0\ . \quad (\varepsilon)$$

Si l'on donne la courbe séparatrice, on trouvera la trajectoire orthogonale des rayons réfractés, en éliminant t et u entre les trois équations (α), (γ), (ε). Si c'est, au contraire, cette dernière courbe qui est donnée, on obtiendra la séparatrice, en éliminant x et y entre les trois équations (α), (β), (δ).

Bien convaincus d'ailleurs, par une longue expérience que, dans les calculs, les avantages de la symétrie l'emportent encore sur ceux de la simplicité, nous supposerons constamment que les données du problème sont disposées, par rapport aux axes, de la manière la plus générale.

III. Supposons, pour premier exemple, que la séparatrice est une droite donnée par l'équation

$$at+bu=a^2+b^2=c^2\ ,$$

dans laquelle, comme l'on sait $(a\ ,\ b)$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite et c la longueur de cette perpendiculaire. Nous aurons

$$a\mathrm{d}t+b\mathrm{d}u=0\ ,$$

au moyen de quoi l'équation (γ) deviendra.

$$\frac{b(t-x)-a(u-y)}{\lambda^2}=\frac{bt-au}{\lambda'^2},$$

ou bien

$$bt-au=\frac{\lambda'^2(ay-bx)}{\lambda^2-\lambda'^2}.$$

Eliminant tour à tour u et t entre cette équation et l'équation

$$at+bu=c^2,$$

il viendra, en ayant égard à la relation $a^2+b^2=c^2$,

$$c^2t=ac^2+\frac{\lambda'^2b(ay-bx)}{\lambda^2-\lambda'^2},$$

$$c^2u=bc^2-\frac{\lambda'^2a(ay-bx)}{\lambda^2-\lambda'^2};$$

et de là encore

$$c^2(t-x)=c^2(a-x)+\frac{\lambda'^2b(ay-bx)}{\lambda^2-\lambda'^2};$$

$$c^2(u-y)=c^2(b-y)-\frac{\lambda'^2a(ay-bx)}{\lambda^2-\lambda'^2}.$$

En prenant tour à tour la somme des quarrés de ces deux dernières équations et la somme des quarrés des deux qui les précèdent, on trouvera successivement, en ayant toujours égard à la relation entre a, b et c,

$$c^2\{(t-x)^2+(u-y)^2\}=c^2\{(x-a)^2+(y-b)^2\}+\frac{\lambda'^2(2\lambda^2-\lambda'^2)(ay-bx)^2}{(\lambda^2-\lambda'^2)^2};$$

$$c^2(t^2+u^2)=c^6+\frac{\lambda'^4(ay-bx)^2}{(\lambda^2-\lambda'^2)^2};$$

tirant de ces deux équations les valeurs de $(t-x)^2+(u-y)^2$ et de t^2+u^2, pour les substituer dans l'équation (α), on obtiendra, pour l'équation de la trajectoire orthogonale des rayons réfractés, en divisant par $\lambda^2-\lambda'^2$

$$\lambda'^4(ay-bx)^2=(\lambda^2-\lambda'^2)c^2\{\lambda^2c^2-\lambda'^2[(x-a)^2+(y-b)^2]\} ;$$

de sorte que cette courbe est une ligne du second ordre.

En développant et ordonnant cette équation par rapport aux puissances et produits de puissances de λ et λ', elle prend cette forme

$$\lambda^2\lambda'^2c^2\{(x^2+y^2)-2(ax+by-c^2)\}=\lambda^4c^4+\lambda'^4(ax+by-c^2)^2 .$$

Ajoutant et retranchant tour à tour à chaque membre

$$2\lambda^2\lambda'^2c^2(ax+by-c^2) ,$$

le second membre deviendra un quarré, dans les deux cas; de sorte qu'en extrayant les racines, on trouvera

$$\pm\lambda\lambda'c\sqrt{x^2+y^2}=\lambda^2c^2+\lambda'^2(ax+by-c^2) ,$$

$$\pm\lambda\lambda'c\sqrt{(x-2a)^2+(y-2b)^2}=\lambda^2c^2-\lambda'^2(ax+by-c^2) .$$

Dans ces équations, qui ne sont que deux formes particulières de l'équation de la trajectoire cherchée, et dont toute combinaison appartiendra conséquemment à cette trajectoire, les signes supérieurs et inférieurs ne se correspondent pas nécessairement et doivent être choisis suivant les rapports entre les données. En prenant leur somme, il vient, en divisant par $\lambda\lambda'c$,

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}\pm\sqrt{(x-2a)^2+(y-2b)^2}=2\frac{\lambda}{\lambda'}c .$$

Or, le premier radical exprime la distance de l'un quelconque des

points de la trajectoire à l'origine, et l'autre exprime la distance du même point au point $(2a, 2b)$, c'est-à-dire, un point symétriquement situé avec l'origine ou le point rayonnant, par rapport à la droite séparatrice ; donc cette équation exprime que la somme ou la différence des distances des différens points de la courbe à ces deux points est une quantité constante ; d'où il suit que ces deux points en sont les foyers, qu'elle a conséquemment son centre au point (a, b), que son excentricité est c et son demi-axe $\frac{\lambda}{\lambda'}c$; cette courbe est donc une ellipse ou une hyperbole, suivant que λ est plus grand ou plus petit que λ'.

De tout cela résulte le théorème suivant :

THÉORÈME I. Deux milieux homogènes, de nature différente, étant séparés l'un de l'autre par un plan indéfini, et des rayons incidens émanés de l'un des points de l'un d'eux se réfractant à la rencontre de l'autre ; ces rayons ainsi réfractés seront tous normaux à une même surface de révolution du second ordre, engendrée par une section conique, tournant autour de la droite qui contient ses foyers. Le centre de cette surface sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point rayonnant sur le plan séparateur ; ce point en sera un des foyers ; et son excentricité sera à son demi-axe dans le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction ; de sorte que la surface trajectoire sera une ellipsoïde allongée ou une hyperboloïde à deux nappes, suivant que le premier milieu sera plus ou moins réfringent que le second.

On trouvera, dans un article inséré à la page 229 du XI.me volume du présent recueil, où nous avons déjà démontré cette proposition, les principales conséquences qui en résultent.

IV. Examinons présentement quelle direction prennent des rayons de lumière émanés d'un même point, situé dans un milieu homogène quelconque, après avoir traversé une lame transparente

à faces planes parallèles, d'un pouvoir réfringent différent de celui du milieu dans lequel elle se trouve située.

Supposons toujours le point rayonnant à l'origine, soit c la distance de ce point à la face de la lame qui en est la plus voisine et e l'épaisseur de cette lame. Par un rayon quelconque, imaginons un plan perpendiculaire aux faces de cette lame ; le rayon, dans tout son trajet, ne sortira pas de ce plan, que nous pourrons prendre pour les plans des coordonnées rectangulaires, et qui coupera la lame suivant deux droites parallèles. En prenant toujours pour origine le point rayonnant et en rendant l'axe des x parallèle à ces deux droites, leurs équations seront

$$y=c\,, \qquad y=c+e\,.$$

Soit l'équation du rayon incident

$$y=mx\,,$$

le sinus d'incidence sera $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$; le sinus de réfraction sera donc

$$\frac{\lambda'}{\lambda\sqrt{1+m^2}}$$

d'où on conclura pour sa cotangente

$$\frac{\sqrt{(\lambda^2-\lambda'^2)+\lambda^2m^2}}{\lambda'}\,.$$

D'un autre côté les équations du point d'immergence seront

$$x=\frac{c}{m}\,, \qquad y=c\,;$$

d'où il suit que l'équation du rayon réfracté sera

$$y-c=\frac{\sqrt{(\lambda^2-\lambda'^2)+\lambda^2m^2}}{\lambda'}\left(x-\frac{c}{m}\right)$$

en combinant cette équation avec l'équation $y=c+e$, on trouvera pour les coordonnées du point d'émergence

$$x=\frac{c}{m}+\frac{\lambda'e}{\sqrt{(\lambda^2-\lambda'^2)+\lambda^2m^2}}\,,\quad y=c+e\ ;$$

et, comme le rayon émergent doit sortir parallèle au rayon immergent, son équation sera

$$y-c-e=m\left\{x-\frac{c}{m}-\frac{\lambda'e}{\sqrt{(\lambda'-\lambda'^2)+\lambda^2m^2}}\right\},$$

ou simplement, en réduisant,

$$y-e=m\left\{x-\frac{\lambda'e}{\sqrt{(\lambda^2-\lambda'^2)+\lambda^2m^2}}\right\}:$$

Or c, qui exprimait la distance de la lame au point rayonnant, n'entre plus dans cette équation; donc la situation du rayon émergent est indépendante de cette distance; de sorte que, si l'on fait avancer ou reculer cette lame parallèlement à elle-même, la situation de ce rayon n'en éprouvera aucun changement.

Tout se passera donc ici de la même manière que si la lame était en contact avec le point rayonnant; ou, ce qui revient au même, tout se passera comme si le point rayonnant était enfoncé dans la substance de la lame au-dessous de sa surface d'une quantité égale à son épaisseur; nous retombons donc de nouveau dans le cas de deux milieux séparés par un plan indéfini, et nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME II. Lorsque des rayons de lumière, émanés d'un

même point, sont contraints de traverser une lame transparente à faces planes parallèles, d'un pouvoir réfringent différent de celui du milieu où elle se trouve située; ces rayons, à leur sortie de cette lame, sont tous normaux à une même surface de révolution du second ordre, engendré par une section conique, tournant autour de la droite qui contient ses foyers. L'axe de cette surface est la perpendiculaire menée aux deux faces de la lame, par le point rayonnant; ce point en est un des foyers; son centre est situé du même côté que la lame par rapport à ce même point; l'excentricité de la trajectoire est égale à l'épaisseur de la lame; enfin, cette excentricité est au demi-axe dans le rapport du sinus de réfraction dans la lame au sinus d'incidence dans le milieu; de sorte que la surface trajectoire est une ellipsoïde allongée ou une hyperboloïde à deux nappes, suivant que le pouvoir réfringent de la lame est supérieur ou inférieur à celui du milieu où elle se trouve située.

On trouvera, dans un article inséré à la page 283 du Ve volume du présent recueil, où nous avons démontré cette proposition pour la première fois, et dans un autre article, qui commence le XIVe volume, les principales conséquences qui en résultent.

V. Pour donner un exemple simple du cas où la courbe séparatrice est l'inconnue du problème, supposons toujours que les rayons incidens émanent de l'origine des coordonnées, et cherchons quelle doit être la ligne séparatrice pour les rayons réfractés concourant en un même point (a, b).

Nous aurons donc ici

$$x=a, \quad y=b;$$

l'équation (β) sera satisfaite d'elle-même; et, en mettant ces valeurs dans l'équation (α), on aura, pour l'équation demandée,

$$\frac{(t-a)^2+(u-b)^2}{\lambda^2}=\frac{t^2+u^2}{\lambda'^2},$$

ou bien

$$\lambda'^2\{(t-a)^2+(u-b)^2\}=\lambda^2(t^2+u^2)$$

ou encore

$$(\lambda^2-\lambda'^2)(t^2+u^2)+2\lambda'^2(at+bu)=\lambda'^2(a^2+b^2);$$

équation d'un cercle, que l'on peut écrire ainsi

$$\left\{t+\frac{\lambda'^2}{\lambda^2-\lambda'^2}a\right\}^2+\left\{u+\frac{\lambda'^2}{\lambda^2-\lambda'^2}b\right\}^2=\left\{\frac{\lambda\lambda'\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda^2-\lambda'^2}\right\}^2;$$

de sorte que les coordonnées du centre de ce cercle sont

$$-\frac{\lambda'^2 a}{\lambda^2-\lambda'^2}, \qquad -\frac{\lambda'^2 b}{\lambda^2-\lambda'^2}$$

et son rayon

$$\frac{\lambda\lambda'\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda^2-\lambda'^2}.$$

On trouvera, d'après cela, pour la distance de son centre au point rayonnant

$$-\frac{\lambda'^2\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda^2-\lambda'^2},$$

et pour la distance de ce même centre au point (a, b)

$$\frac{\lambda^2\sqrt{a+b^2}}{\lambda-\lambda'^2}.$$

Le produit de ces deux distances étant égal au quarré du rayon;

et les trois points étant d'ailleurs en ligne droite, il s'ensuit que le point de départ des rayons incidens et le point de concours des rayons réfractés sont deux points conjugués par rapport au cercle. Leurs distances respectives à son centre sont dans le rapport de λ'^2 à λ^2 ; de sorte que le point rayonnant sera intérieur au cercle et le point de concours des rayons réfractés extérieur, si l'on a $\lambda' < \lambda$. Ce sera le contraire si l'on a $\lambda' > \lambda$.

De tout cela résulte le théorème suivant :

THÉORÈME III. Une sphère transparente étant située dans un milieu homogène dont le pouvoir réfringent est différent du sien ; il existe toujours, sur la direction de chacun de ses diamètres, un point tellement situé que les rayons qui en émanent, après s'être réfractés à la rencontre de sa surface, vont concourir de nouveau en un autre point de ce diamètre. Ces deux points, situés d'un même côté du centre, sont conjugués l'un à l'autre par rapport à la sphère, c'est-à-dire, que le rectangle de leurs distances à son centre est équivalent au quarré de son rayon ; d'où il résulte qu'ils sont l'un intérieur et l'autre extérieur à la sphère. Enfin, leurs distances à son centre sont dans le rapport du quarré du sinus d'incidence dans le milieu où la sphère se trouve située au quarré du sinus de réfraction dans cette sphère ; ce qui les détermine complètement l'un et l'autre, et prouve en outre que le point rayonnant est intérieur ou extérieur à la sphère suivant que le pouvoir réfringent de cette sphère est supérieur ou inférieur à celui du milieu (*).

Ce curieux théorème est dû à M. le professeur Auguste de la

(*) Lorsque le pouvoir réfringent de la sphère est supérieur à celui du milieu, il y a réellement, dans son intérieur, un point tel que les rayons qui en émanent divergent, à leur sortie, comme s'ils partaient d'un point extérieur. Dans le cas contraire, ce sont des rayons arrivant à la sphère, dans des directions convergentes vers le premier de ces points, qui, après s'être rompus à sa surface, convergent vers le dernier.

Rive, de Genève, qui l'a démontré à la page 55 de sa *Dissertation sur les caustiques*; (in-4.°, Genève 1823).

VI. Examinons présentement, d'une manière générale, la direction que prennent des rayons de lumière émanés d'un même point, après s'être réfractés à la rencontre de la circonférence d'un cercle transparent, situé d'une manière quelconque par rapport au point rayonnant. Ici, pour plus de simplicité, nous supposerons le centre du cercle à l'origine; et le point rayonnant sera (a, b). En conséquence, les équations (2') et (5'), seront remplacées par ces deux-ci

$$x'=a\,, \qquad y'=b\,;$$

l'équation (4) sera

$$t^2+u^2=r^2\,;$$

d'où

$$tdt+udu=0\,;$$

au moyen de quoi les équations (1) et (3) deviendront

$$\frac{(t-x)^2+(u-y)^2}{\lambda^2}=\frac{(t-a)^2+(u-b)^2}{\lambda'^2}\,,$$

$$\frac{u(t-x)-t(u-y)}{\lambda^2}=\frac{u(t-a)-t(u-b)}{\lambda'^2}\,;$$

En réduisant dans la dernière, et en remplaçant dans l'autre t^2+u^2 par r^2, on obtiendra en t et u, ces deux équations du premier degré

$$2(\lambda'^2x-\lambda^2a)t+2(\lambda'^2y-\lambda^2b)u=\lambda'^2(x^2+y^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+r^2)\,,$$

$$(\lambda'^2y-\lambda^2b)t-(\lambda'^2x-\lambda^2a)u=0\,.$$

En ajoutant au quarré de la première le quadruple du quarré de la seconde, le terme en tu disparaîtra, et en remplaçant t^2+u^2 par sa valeur r^2, on obtiendra, pour l'équation de la trajectoire orthogonale des rayons réfractés,

$$4r^2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2\}=\{\lambda'^2(x^2+y^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+r^2)\}^2.$$

En développant et rassemblant les termes affectés des mêmes puissances et produits des puissances de λ et λ', cette équation prendra la forme

$$2\lambda^2\lambda'^2\{(a^2+b^2+r^2)(x^2+y^2+r^2)-4r^2(ax+by)\}$$

$$=\lambda'^4(x^2+y^2-r^2)^2+\lambda^4(a^2+b^2-r^2)^2\,.$$

Ajoutant et retranchant tour à tour à chacun des deux membres de cette dernière la quantité

$$2\lambda^2\lambda'^2(a^2+b^2-r^2)(x^2+y^2-r^2)\,,$$

son second membre deviendra un quarré dans les deux cas, et il viendra, par l'extraction des racines quarrées de deux membres

$$\pm2\lambda\lambda'\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)-2r^2(ax+by)+r^4}=\lambda'^2(x^2+y^2-r^2)+\lambda^2(a^2+b^2-r^2)\,,$$

$$\pm2\lambda\lambda'r\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\lambda'^2(x^2+y^2-r^2)-\lambda^2(a^2+b^2-r^2)\,.$$

Equations dans lesquelles les signes supérieurs et les signes inférieurs ne se correspondent pas nécessairement; et où les uns et les autres doivent être pris, suivant les grandeurs et les signes des données a, b, r, λ et λ'.

En retranchant la seconde de la première, on trouve

$$\pm\lambda'\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2-2r^2(ax+by)+r^4}\pm\lambda' r\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$=\lambda(a^2+b^2-r^2)\ ;$$

ou encore

$$\pm\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{\left\{x-\frac{ar^2}{a^2+b^2}\right\}^2+\left\{y-\frac{br^2}{a^2+b^2}\right\}^2}\pm r.\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda'}(a^2+b^2-r^2)\ ;$$

or, si l'on prend pour foyers le point rayonnant et son conjugué, par rapport au cercle, les deux radicaux du premier membre de cette équation exprimeront les rayons vecteurs d'un même point quelconque de la courbe ; de sorte qu'on a le théorème suivant :

THÉORÈME IV. Lorsque des rayons de lumière, émanés d'un même point de l'espace, extérieur ou intérieur à une sphère transparente homogène, sont réfractés ou réfléchis à l'entrée ou à la sortie de cette sphère ; ils deviennent alors normaux à une surface de révolution du quatrième ordre, ayant pour axe la droite qui contient le point rayonnant et le centre de la sphère. La propriété caractéristique de cette surface est que la somme ou la différence des produits respectifs des distances de ses différens points au point rayonnant et à son conjugué par rapport à la sphère, par des multiplicateurs constans, est elle-même une quantité constante.

Cet élégant théorème est dû à M. Sturm, qui l'a démontré dans un article inséré à la page 205 du précédent volume du présent recueil.

Nous nous proposions de nous livrer à beaucoup d'autres recherches encore ; mais l'abondance des matériaux que nous avons à publier nous oblige à leur céder la place, et à renvoyer ces

recherches pour un autre temps. Ce qui précède suffira du moins pour montrer comment tous les théorèmes déjà connus sur le sujet qui nous occupe peuvent se déduire uniformément de nos méthodes et de nos formules.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes ;

Par M. L. F. Magnus.



L'enveloppe des cordes qui retranchent d'un cercle des segmens égaux, est évidemment un autre cercle, concentrique au premier et touchant ces cordes à leur milieu. On sait aussi que l'enveloppe des cordes qui retranchent des segmens équivalens d'une section conique quelconque, touche également ces cordes à leur milieu ; mais cette propriété n'est pas particulière à ces sortes de courbes, et nous allons faire voir qu'elle est générale pour toutes les courbes planes quelles qu'elles soient. Nous démontrerons ensuite quelques autres propositions analogues que le lecteur ne trouvera peut-être pas dépourvues d'intérêt.

§ I.

Pour éviter les répétitions, nous allons, avant d'entrer en matière, établir quelques formules et convenir de quelques locutions qui nous seront utiles pour parvenir à notre but.

Soit

$$y=\varphi(x)$$

l'équation d'une courbe plane quelconque, rapportée à des axes rectangulaires. Soient en outre (α, β), (α', β') deux points déterminés quelconques de cette courbe ; de telle sorte qu'on ait

$$\beta=\varphi(\alpha)\,, \qquad \beta'=\varphi(\alpha')\,;$$

l'équation de la corde qui joindra ces deux points sera

$$(\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0\,.$$

En supposant qu'il existe, entre α et α', une relation donnée par l'équation

$$U=0\,,$$

l'équation de l'enveloppe de toutes les cordes $\gamma=0$ sera le résultat de l'élimination des cinq quantités α, β, α', β', $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ entre les six équations

$$\beta=\varphi(\alpha)\,, \qquad \beta'=\varphi(\alpha')\,,$$

$$(\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0\,,$$

$$\left[(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\frac{d\alpha'}{d\alpha}-\left[(y-\beta')-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]=\frac{d\gamma}{d\alpha}=0\,,$$

$$U=0\,, \qquad \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=\frac{dU}{d\alpha}=0\,.$$

Mais, si l'on ne veut trouver que le point de contact de l'une des cordes contenues dans $\gamma=0$ avec l'enveloppe, il suffira d'éliminer $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ entre les deux équations

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}=0\ , \quad \frac{dU}{d\alpha}=0\ ;$$

ce qui donnera l'équation

$$\left[(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\left[(y-\beta')-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=V=0\ ;$$

et de déterminer ensuite les valeurs de x et de y qui satisfont aux deux équations

$$\gamma=0\ , \qquad V=0\ ;$$

ce qui revient à déterminer le point d'intersection des lignes exprimées par ces mêmes équations. Or, comme la première est la corde elle-même, il suffira de construire l'autre, que l'on voit être également une droite, laquelle coupera conséquemment la corde au point cherché; ce qui prouve, en premier lieu, que jamais l'enveloppe ne saurait toucher une corde en plusieurs points.

Or l'équation $V=0$ est satisfaite, quelle que puisse être la relation $U=0$, en posant à la fois

$$(y-\beta)=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-\alpha)\ , \quad (l) \qquad (y-\alpha')=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha')\ , \quad (l')\ ;$$

donc l'équation $V=0$ est celle d'une droite qui joint le point cherché au point d'intersection des deux droites (l, l'), point qu'à l'avenir nous désignerons par (s).

Quant aux droites (l, l'), on voit que chacune d'elles est une parallèle menée à l'une des extrémités de la corde $\gamma=0$, à la tangente à l'autre extrémité de cette corde. A l'avenir nous appellerons *triangle sur la corde* le triangle formé par γ avec les deux droites (l, l'); le point (s) de concours de ces droites en sera dit le *sommet*, et ces droites en seront les côtés. Ce triangle, joint au

triangle formé par la corde et les tangentes à ses deux extrémités, forme un parallélogramme dont γ est une diagonale.

§. II.

Supposons que les aires des segmens retranchés de la courbe $y=0$, soient constantes et équivalentes à un quarré donné c^2; et posons

$$\int_{\alpha'}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x=A', \qquad \int_{\alpha}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x=A;$$

nous aurons

$$A'-A-\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)(\beta'+\beta)-c^2=U=0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha'}\right)=\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}\alpha'}-\tfrac{1}{2}(\beta'+\beta)-\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}=\tfrac{1}{2}\left[(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right],$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha}\right)=-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}+\tfrac{1}{2}(\beta'+\beta)-\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=\tfrac{1}{2}\left[(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $V=0$, elle deviendra.

$$\left[(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right]\left[(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right]+\left[(y-\beta')-(x-\alpha')\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right]\left[(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right]=V=0;$$

et on voit aisément qu'elle sera satisfaite par les valeurs de x et y qui satisferont aux deux équations

$$(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}-(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}=0,$$

$$(y-\beta')-(x-\alpha')\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}+(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=0.$$

lesquelles se réduisent simplement à

$$(y-\beta')=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-\alpha')\,,\qquad (y-\beta)=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\,,$$

qu'on reconnaît pour les équations des tangentes aux deux extrémités de la corde $y=0$. La droite $V=0$, que nous savons déjà passer par le point (s), passe donc aussi, dans le cas présent, par le point de concours des deux tangentes ; elle est donc la deuxième diagonale du parallélogramme dont il a été question ci-dessus ; elle coupe donc la première $y=0$ en son milieu, et conséquemment ce milieu sera le point de contact de la corde $y=0$ avec l'enveloppe de toutes les cordes qui retranchent de la courbe des segmens équivalens. On a donc ce théorème général :

L'enveloppe des cordes qui retranchent d'une courbe plane quelconque des segmens équivalens, touche chacune de ces cordes en son milieu (*).

(*) Ce théorème pourrait aussi être assez simplement démontré comme il suit :

Considérons deux cordes consécutives quelconques MN et M'N' se coupant en O ; ce point O sera le point de contact de l'enveloppe avec la corde MN ; et, à cause de la petitesse des arcs MM', NN', les secteurs MOM', MON' pourront être considérés comme des triangles rectilignes, lesquels, par l'état de la question, devront être équivalens. Mais, parce que ces triangles ont en O un angle égal, leurs aires sont proportionnelles aux produits des côtés qui comprennent cet angle, de sorte qu'on doit avoir

$$OM.OM'=ON.ON'\,.$$

Soient posés

$$OM'=OM+\mu\,,\qquad ON'=ON+\nu\,,$$

μ et ν pouvant être indistinctement positifs ou négatifs ; il viendra, en substituant,

§. III.

Supposons, en second lieu, que les arcs de la courbe

$$y=\varphi(x)$$

sous-tendus par la corde mobile $y=0$ doivent être tous d'une même longueur donnée c; et posons

$$\int_{\alpha'}^{\circ} \mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=A'; \quad \int_{\alpha}^{\circ} \mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=A;$$

nous aurons

$$A'-A-c=U=0;$$

d'où

$$\overline{OM}^2+\mu.OM=\overline{ON}^2+\nu.ON;$$

mais il est clair que μ et ν doivent s'évanouir en même temps; donc, on doit simplement avoir

$$\overline{OM}^2=\overline{ON}^2 \quad \text{d'où} \quad OM=ON.$$

On voit même qu'il est nullement nécessaire pour cela que la courbe proposée soit assujettie à la loi de continuité.

Ce théorème se lie d'ailleurs fort bien avec le suivant, démontré par M. Dupin, pour une surface continue ou discontinue, dans ses *Applications de géométrie*, (pag. 32).

L'enveloppe des plans cordes qui détachent des segmens équivalens d'une surface courbe quelconque, touche chacun de ces plans cordes au centre de gravité de son aire.

J. D. G.

$$\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}\,, \qquad \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=-\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}\,;$$

en conséquence, l'équation V sera ici

$$y=\frac{\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}-\frac{d\beta'}{d\alpha'}\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}$$

$$x-\frac{\left(\beta-\alpha\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}-\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\sqrt{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}\,.$$

or, comme cette droite doit passer par le point (s) de concours des deux droites (l', l), il s'ensuit qu'en désignant par a et b les coordonnées de ce point, l'équation $V=0$ pourra prendre la forme

$$y-b=\frac{\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}-\frac{d\beta'}{d\alpha'}\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}(x-a)\,.$$

Dans la même hypothèse, les équations des deux droites (l', l) prennent la forme

$$y-b=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-a)\,, \qquad y-b=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-a)\,,$$

et dès lors on reconnaît la première pour l'équation de la droite qui divise en deux parties égales l'angle des droites (l', l), de sorte qu'on a ce théorème :

L'enveloppe des cordes qui sous-tendent des arcs de même longueur d'une courbe plane quelconque, touche chacune de ces cordes au point où elle est coupée en raison inverse des longueurs des tangentes à ses deux extrémités ; ou, en d'autres termes, le point de contact de l'enveloppe avec chaque corde et le point où sa direction est rencontrée par la droite qui divise en deux parties égales l'angle des tangentes à ses deux extrémités, sont des points symétriquement situés par rapport au milieu de cette corde.

§. IV.

Supposons encore que, dans la courbe

$$y=\varphi(x) ,$$

les cordes $\gamma=0$ doivent toutes être d'une même longueur donnée c, nous aurons

$$(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2-c^2=U=0 ;$$

d'où

$$\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=+2\left[(\alpha'-\alpha)+(\beta'-\beta)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right], \quad \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=-2\left[(\alpha'-\alpha)+(\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\right],$$

en conséquence l'équation $V=0$ deviendra

$$(\beta'-\beta)\left\{y-\frac{\left(\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\frac{d\beta}{d\alpha}}{\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\frac{d\beta}{d\alpha}}\right\}+(\alpha'-\alpha)\left\{x-\frac{\left(\alpha\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\alpha'\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+(\beta'-\beta)}{\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\frac{d\beta}{d\alpha}}\right\}=0 ;$$

or l'équation de la corde $\gamma=0$, étant

$$(\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0 ,$$

il est visible que ces deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre. La droite $V=0$, que nous savons déjà passer, dans tous les cas, par le point de concours des droites (I', I), est donc en outre, dans le cas présent, perpendiculaire sur la corde $y=0$; de sorte qu'on a ce théorème :

L'enveloppe des cordes égales, dans une courbe plane quelconque, touche chacune de ces cordes en un point autant distant de chacune de ses extrémités que le pied de la perpendiculaire abaissée sur sa direction du point de concours des tangentes à ses deux extrémités est distant de son autre extrémité ; ou, en d'autres termes, le point de contact de l'enveloppe avec chaque corde et le pied de la perpendiculaire abaissée sur sa direction du point de concours des tangentes à ses deux extrémités, sont deux points symétriquement situés par rapport au milieu de cette corde (*).

§. V.

Supposons enfin que, dans la courbe

$$y=\varphi(x)$$

l'angle que font les tangentes aux extrémités de la corde $y=0$, doit être constant, de manière que sa tangente soit une quantité donnée c; nous aurons alors

(*) Le problème de l'enveloppe des cordes égales a été proposé à la page 36 du VIII.e volume du présent recueil ; et, bien qu'on l'ait restreint aux sections coniques seulement, il n'en a été donné aucune solution ; non pourtant qu'il soit difficile à mettre en équation ; mais parce qu'il exige des éliminations extrêmement laborieuses. Il serait curieux de voir si le théorème que donne ici M. Magnus ne pourrait pas en faciliter la solution.

Au surplus l'enveloppe dont il s'agit ayant, en général, comme les caustiques, des points de rebroussement plus ou moins nombreux, peut-être se trouverait-on mieux de chercher d'abord l'équation de la trajectoire orthogonale des cordes égales ; l'enveloppe en serait alors la développée.

J. D. G.

$$\frac{\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\frac{d\beta}{d\alpha}}{1+\frac{d\beta'}{d\alpha'}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}}-c=U=0\,,$$

d'où

$$\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=\frac{\left[1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right]\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}{\left(1+\frac{d\beta'}{d\alpha'}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}\,,\qquad \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=-\frac{\left[1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2\right]\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{\left(1+\frac{d\beta'}{d\alpha'}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}\,;$$

Or, en désignant par m l'angle de la droite $V=0$ avec l'axe des x, on a en général,

$$\text{Tang.}\,m=\frac{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\frac{d\beta'}{d\alpha'}+\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)\frac{d\beta}{d\alpha}}{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}\,;$$

on aura donc, dans le cas présent

$$\text{Tang.}\,m=\frac{\left[1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right]\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}-\left[1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2\right]\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\frac{d\beta'}{d\alpha'}}{\left[1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right]\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}-\left[1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2\right]\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}=\frac{\frac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\,\frac{d\beta}{d\alpha}-\frac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}\,\frac{d\beta'}{d\alpha'}}{\frac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}-\frac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}}\,;$$

Cela posé, soient P, P' les points (α,β), (α',β') ; soient C, C' les centres de courbure de ces deux points, dont nous supposerons les coordonnées respectives $(t\,,\,u)$, $(t'\,,\,u')$; soient enfin Q, Q' les milieux des droites PC' et P'C ; les coordonnées de ces deux points seront respectivement

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+t'), \qquad \tfrac{1}{2}(\alpha'+t),$$

$$\tfrac{1}{2}(\beta+u'); \qquad \tfrac{1}{2}(\beta'+u).$$

En conséquence, la droite Q, Q′ fera avec l'axe des x un angle n dont la tangente tabulaire sera

$$\text{Tang.}n=\frac{(\beta'+u)-(\beta+u')}{(\alpha'+t)-(\alpha+t')}=\frac{(u-\beta)-(u'-\beta')}{(t-\alpha)-(t'-\alpha')}.$$

Or on a

$$t=\alpha-\frac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\frac{d\beta}{d\alpha}, \qquad u=\beta+\frac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}},$$

$$t'=\alpha'-\frac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}\frac{d\beta'}{d\alpha'}, \qquad u'=\beta'+\frac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}};$$

valeurs qui, substituées dans celle de Tang.n, donnent

$$\text{Tang.}n=-\frac{\dfrac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}-\dfrac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}}{\dfrac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\dfrac{d\beta}{d\alpha}-\dfrac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}}.$$

On trouve d'après cela

$$1+\text{Tang}\,m\,\text{Tang.}n=0;$$

d'où il suit que la droite QQ′ est perpendiculaire à la droite $V=0$; et qu'ainsi on a ce théorème :

Un angle mobile invariable étant constamment circonscrit à une courbe plane quelconque, le point de contact de l'enveloppe de toutes les cordes de contact avec l'une quelconque d'entre elles s'obtiendra en construisant d'abord sur cette corde, comme diagonale, un parallélogramme dont deux côtés soient les tangentes à ses extrémités; puis sur cette même corde, comme côté, un quadrilatère dont les centres de courbure qui répondent à ses deux extrémités soient deux sommets. Alors, si, par le sommet du parallélogramme opposé au sommet de l'angle circonscrit, on conduit une perpendiculaire à la direction de la droite qui contient les milieux des deux diagonales du quadrilatère, cette perpendiculaire coupera la corde de contact au point de contact cherché (*).

Berlin, le 19 mai 1825.

(*) On a proposé (tom. VIII, pag. 36) de trouver l'équation de l'enveloppe de la corde de contact d'un angle mobile et invariable constamment circonscrit à une section conique; ce qui a donné à M. Poncelet (même volume, pag. 201) l'occasion de développer sa théorie des polaires réciproques.

Dans l'écrit qu'on vient de lire, l'auteur a exactement suivi la marche que nous avons si soigneusement recommandée ailleurs (tom. VIII, pag. 158), et dont nous nous sommes appliqués à donner des exemples en divers endroits de ce recueil; et c'est sans doute pour cela qu'il a obtenu des résultats si élégans.

J. D. G.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Réponse aux remarques de M. Stein, *publiées à la page 230 du XV.e volume des* Annales ;

Par M. Vincent, Professeur de mathématiques et de physique au Collége royal de Reims.

Au Rédacteur des *Annales* ;

Monsieur,

En attendant que je livre à l'impression une petite dissertation où je crois avoir jeté quelque jour sur les paradoxes que présente la théorie des logarithmes, je crois ne devoir pas laisser sans réponse les objections faites par M. Stein aux propositions que j'ai avancées dans le n.° 14 du mémoire inséré au commencement du XV.e volume des *Annales*.

M. Stein regarde l'expression $a^{\frac{mp}{np}}$ comme étant plus générale que $a^{\frac{m}{n}}$: si cette assertion pouvait être admise, a ne serait plus identique avec $a^{\frac{n}{n}}$ *qu'il faut bien distinguer de* $(a^n)^{\frac{1}{n}}$. Or, il n'y a que deux manières d'interpréter $a^{\frac{n}{n}}$; ou bien c'est la $n.^{me}$ puissance de la racine $n.^{me}$ de a ; ce qui donne évidemment a, ou bien c'est la racine $n.^{me}$ de la $n.^{me}$ puissance de a. Dans ce dernier cas, il semble que le résultat doive avoir n valeurs differen-

tes; mais, comme *on connait la racine* qui a formé a^n, on donnerait au résultat de la deuxième opération une généralité que réellement il n'a pas, si on lui attribuait toute autre valeur que a (*).

Mais, en admettant que cette raison ne soit pas jugée suffisante, en voici une autre qui me paraît sans réplique. On a, en représentant par A la valeur arithmétique de $a^{\frac{m}{n}}$,

$$a^{\frac{m}{n}}=A.1^{\frac{m}{n}}=A(\text{Cos}.2\frac{m}{n}k\varpi+\sqrt{-1}\text{Sin}.2\frac{m}{n}k\varpi)\ ;$$

Or, si $\frac{m}{n}$ est une fraction irréductible, en donnant à k toutes les valeurs entières possibles, on obtiendra n valeurs différentes de $a^{\frac{m}{n}}$, ni plus ni moins. Si, ensuite, on met $\frac{mp}{np}$ à la place de $\frac{m}{n}$, on aura

$$a^{\frac{mp}{np}}=A(\text{Cos}.2\frac{mp}{np}k\varpi+\sqrt{-1}\text{Sin}.2\frac{mp}{np}k\varpi)\ ;$$

or il est facile de voir qu'en donnant à k toutes les valeurs entières possibles dans cette dernière formule, on n'obtiendra jamais que les n valeurs différentes déjà déduites de la première. Il n'est donc pas besoin de donner une *restriction arbitraire à la définition des logarithmes*, pour réduire l'exposant à ses moindres termes, puisque la formule l'y réduit nécessairement; ce serait, au contraire, tomber dans cet inconvénient que de donner aux exposans des dénominateurs infinis, et d'établir arbitrairement qu'on ne doit pas les réduire.

Un autre objection, relative aux courbes discontinues, me pa-

(*) Voyez l'*Algèbre* de M. LACROIX, n.° 172.

raît encore moins fondée que la précédente. M. Stein dit que, si l'on faisait d'autres hypothèses que les miennes sur la succession des valeurs de x, on parviendrait à des résultats différens des miens; que si, par exemple, au lieu du dénominateur $4q+2$ on choisissait 2^q, on trouverait, pour la courbe $y=a^x$, en suivant mot à mot mon raisonnement, *une branche composée de parties continues, séparées par des points, du côté des y négatives;* et que, si l'on prenait pour dénominateur $2q+1$, on ne trouverait rien du côté des y négatives.

Avant de répondre à cette objection, je ferai d'abord deux observations : la première, que ni la formule 2^q ni la formule $4q+2$ n'est propre à représenter tous les nombres entiers. J'ai choisi la dernière uniquement parce qu'elle m'a paru plus propre qu'aucune autre à faire ressortir les résultats que je voulais mettre en évidence. La seconde observation est qu'une série de points infiniment rapprochés ne suffisent pas plus pour constituer une ligne, que les sommets d'un polygone pour former le polygone. D'un côté comme de l'autre, il faut que ces points soient liés entre eux; car une ligne se compose d'élémens et non de points; et cela prouve, en passant, que l'on a tort de définir les lignes, comme on le fait quelquefois, une série de points infiniment rapprochés (*).

Maintenant, pour répondre à M. Stein, il me suffira de mettre en regard son raisonnement et le mien. M. Stein donne à x des valeurs qui ont pour dénominateur commun 2^q; il trouve plusieurs ordonnées successives réelles : et, sans s'inquiéter si, entre elles, il n'en existe pas d'imaginaires, il conclut qu'il y a continuité, ou bien les valeurs qu'il donne à x ont pour dénominateur com-

(*) On peut très-bien définir la ligne *une série de points infiniment voisins les uns des autres*, pourvu qu'on ajoute cette condition qu'il se trouve toujours un de ces points sur toute droite indéfinie menée sur leur plan, de manière à passer entre le premier et le dernier d'entre eux.

J. D. G.

mun $2q+1$; il trouve plusieurs ordonnées successives imaginaires ; et, sans s'inquiéter si entre elles il n'en existe pas de réelles, il conclut que le lieu géométrique est entièrement imaginaire de ce côté. Tel est le raisonnement de M. Stein ; voici le mien : je donne à x des valeurs qui ont pour dénominateur $4q+2$; je trouve les ordonnées successives alternativement réelles et imaginaires, et j'en conclus qu'il y a discontinuité. Je laisse au lecteur à décider de quel côté est la vigueur du raisonnement.

Que l'on veuille donc bien remarquer une chose sur laquelle, apparemment je n'ai pas assez insisté. C'est en croissant d'une manière continue dans la formule

$$1^x = \text{Cos.}\,2k\varpi x + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,2k\varpi x \ ,$$

que la variable x fait prendre à la variable y des valeurs discontinues ; et cela ne paraîtra pas très-surprenant, si l'on considère que la formule, bien que continue par rapport à x, est, par sa nature, essentiellement discontinue relativement à k ; cette quantité ne devant recevoir que des valeurs entières. C'est cette même considération, assez délicate pour échapper au premier aperçu, qui, à ce qu'il me paraît, rend fautif le raisonnement de M. Stein, au n.° 12 de sa dissertation (page 105) ; la quantité k qu'il considère étant astreinte à demeurer *entière, même à sa limite infinie ;* la continuité qu'il suppose ne me paraît plus pouvoir être admise.

Je pourrais ajouter d'autres raisons encore à l'appui de mon opinion ; mais je veux épargner au lecteur l'ennui d'une discussion qui, peut-être, ne serait pas à ses yeux d'une haute importance. Je crois cependant devoir signaler l'existence de certaines lignes, composées de points situés d'abord à des distances finies, se rapprochant insensiblement et se terminant en lignes pointillées ou ponctuées ; et à l'égard desquelles, conséquemment, il n'est plus possible de nier la discontinuité ; et les lignes discontinues se pré-

sentent alors tout naturellement comme les limites de séries de points qui se rapprochent indéfiniment sans jamais s'éteindre. Je pourrai revenir plus amplement sur ce sujet dans la dissertation dont je m'occupe actuellement.

Il ne sera pas sans doute hors de propos de répéter ici la déclaration que j'ai déjà faite dans les *Annales* (tom. XV, pag. 195) que le fond de la théorie des courbes discontinues se trouve dans Euler. Si je l'eusse su plutôt, probablement que je me serais dispensé d'écrire sur ce sujet. Mais, puisqu'il en est autrement, on trouvera naturel, je pense, que je m'appuye de l'autorité d'Euler, ou plutôt que je défende ses principes, auxquels j'ai été conduit par mes propres recherches.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de Géométrie.

DES points, au nombre de m, étant donnnés dans l'espace, et n étant un nombre entier moindre que $m-1$; on peut déterminer $n+1$ points tels que, si, d'un point quelconque de l'espace, on mène des droites à ces $m+n+1$ points, la somme des $(2n)^{mes}$ puissances des droites menées aux m points donnés soit à la somme des $(2n)^{mes}$ puissances des droites conduites aux $n+1$ points trouvés, comme m est à $n+1$.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur les intégrales définies, où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies déjà connues et celles d'un grand nombre d'autres;

Par M. Cauchy, de l'Académie royale des sciences, etc.



J'ai montré, dans plusieurs mémoires, dont l'un a été présenté à l'Institut le 7 novembre 1814; les avantages que pouvait offrir la considération des intégrales définies *singulières*, c'est-à-dire, prises entre des limites infiniment rapprochées de certaines valeurs attribuées aux variables qu'elles renferment. On peut consulter à ce sujet l'analise des travaux de l'Institut, pendant l'année 1814, où se trouve imprimée une partie du rapport de M. Legendre, sur le mémoire que j'avais présenté dans la même année. On peut également consulter un article inséré dans le Bulletin de la société philomatique pour 1822, le résumé des leçons que j'ai données à l'école polytechnique, le XIX.e Cahier du journal de cette école; les notes ajoutées au mémoire sur la théorie des ondes, inséré dans le recueil des pièces couronnées par l'Institut, enfin un nouveau mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, et un extrait de ce mémoire inséré dans le Bulletin des sciences, d'avril 1825.

Parmi les formules générales que j'ai données dans ces mémoi-



res, l'une des plus remarquables est celle qui fournit la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\ ;$$

lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit 1.° pour $x=\pm\infty$, quel que soit y; 2.° pour $y=\infty$, quel que soit x, et que d'ailleurs cette fonction conserve une valeur unique et déterminée, pour toutes les valeurs de x et de y renfermées entre les limites

$$x=-\infty\ ,\quad x=+\infty\ ,\quad y=0\ ,\quad y=\infty\ .$$

Si, après avoir cherché les racines réelles ou imaginaires de l'équation

$$(1)\qquad \frac{1}{f(x)}=0\ ,$$

on désigne par x_1, x_2, x_3, ... celles de ces racines dans lesquelles le coefficient des $\sqrt{-1}$ est positif, et par f_1, f_2, f_3, ... les valeurs que reçoivent les produits

$$\varepsilon f(x_1+\varepsilon)\ ,\quad \varepsilon f(x_2+\varepsilon)\ ,\quad \varepsilon f(x_3+\varepsilon)\ , ...$$

lorsque ε se réduit à zéro; alors en posant

$$(2)\qquad \Delta=2\varpi(f_1+f_2+f_3+....)\sqrt{-1}\qquad (*)$$

on trouvera

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\Delta\ .\qquad (**)$$

(*) Résumé, pag. 135, formule (13).
(**) Résumé, pag. 136, formule (14).



C'est ce que l'on démontre sans peine, à l'aide de la méthode que j'ai employée dans la 34.me leçon du calcul infinitésimal.

Si l'équation (1) avait plusieurs racines égales à x_1 ; en désignant par m le nombre de ces racines, et par ε un nombre infiniment petit, il faudrait supposer, dans la formule (2) non plus

$$f_1 = \varepsilon f(x_1 + \varepsilon),$$

mais

$$f_1 = \frac{1}{1.2.3.\ldots.(m-1)} \cdot \frac{d^{m-1}[\varepsilon^m . f(x_1+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}} ; \quad (*)$$

Enfin, si, dans la racine x_1, le coefficient de $\sqrt{-1}$ se réduisait à la limite des quantités positives décroissantes, c'est-à-dire, à zéro, ou, en d'autres termes, si la racine x_1 devenait réelle, le terme f_1, correspondant à cette racine, devrait être réduit à moitié. Dans la même hypothèse, l'équation (3) fournirait, non plus la valeur générale de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

qui deviendrait indéterminée, mais sa valeur *principale*, c'est-à-dire, la limite vers laquelle convergerait la somme

$$\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx$$

tandis que ε s'approcherait indéfiniment de zéro. Des remarques semblables doivent être faites à l'égard de toutes les racines de l'équation (1).

(*) Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires.

Ajoutons que, dans le cas où l'équation (1) a des racines réelles, il est facile de transformer la valeur principale de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

qui compose le premier membre de la formule (3), en une intégrale définie, dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ cesse de devenir infiniment grande, pour des valeurs réelles de la variable x.

Comme la formule (3) fournit les valeurs d'une multitude d'intégrales définies, il ne sera pas inutile d'en donner une démonstration directe. La démonstration dont il s'agit sera l'objet de la première partie de ce mémoire. Dans la seconde j'indiquerai les applications les plus remarquables de cette formule.

Première Partie.

La formule (3) se déduit très-facilement d'un théorème que nous allons établir en peu de mots.

THÉORÈME. Si l'on désigne par $f(x)$ une fonction telle que l'expression $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouisse 1.° pour $x=\pm\infty$, quel que soit y; 2.° pour $y=\infty$, quel que soit x, et demeure toujours finie et continue, entre les limites $x=-\infty$, $x=+\infty$, $y=0$, $y=\infty$; et si, de plus, on nomme F la limite vers laquelle converge le produit $xf(x)$, tandis que la valeur numérique de x devient infiniment grande; on aura

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -\varpi F.\sqrt{-1}.$$

Démonstration. Pour établir ce théorème, nous chercherons, d'abord la valeur de l'intégrale

$$(2) \qquad \int_{-X}^{+X} f(x)dx .$$

Or, généralement,

$$(3) \qquad \frac{d.f(x+y\sqrt{-1})}{dy} = \sqrt{-1}.\frac{d.f(x+y\sqrt{-1})}{dx} .$$

Si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente, par rapport à x et à y, entre les limites $x=-X$, $x=+X$, $y=0$, $y=\infty$, on en tirera

$$\int_{-X}^{+X}\int_0^{\infty} \frac{d.f(x+y\sqrt{-1})}{dy} dydx = \sqrt{-1}\int_0^{\infty}\int_{-X}^{+X} \frac{d.f(x+y\sqrt{-1})}{dx} dxdy ;$$

puis, en ayant égard à la condition $f(x+\infty\sqrt{-1})=0$

$$(4) \quad \int_{-X}^{+X} f(x)dx = -\sqrt{-1}\int_0^{\infty}[f(X+y\sqrt{-1})-f(-X+y\sqrt{-1})]dy .$$

Si maintenant on attribue à la quantité X une valeur très-grande, on aura sensiblement

$$(X+y\sqrt{-1})f(X+y\sqrt{-1}) = (-X+y\sqrt{-1})f(-X+y\sqrt{-1}) = F ,$$

et, par suite,

$$f(X+y\sqrt{-1}) = \frac{F}{X+y\sqrt{-1}} , \qquad f(-X+y\sqrt{-1}) = \frac{F}{-X+y\sqrt{-1}} ,$$

d'où

$$(5) \qquad \int_{-X}^{+X} f(x)dx = -F\sqrt{-1}\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{X+y\sqrt{-1}} + \frac{1}{X-y\sqrt{-1}}\right\} dy$$

$$=-F\sqrt{-1}\int_0^{\infty}\frac{2X\mathrm{d}y}{X^2+y^2}=-\varpi F\sqrt{-1}\ .$$

Cette dernière équation deviendra rigoureuse, si l'on pose $X=\infty$, et se réduira dès lors à la formule (1).

Observons toutefois que, si l'intégrale définie

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

est du nombre de celles dont les valeurs générales sont indéterminées, la formule (1) fournira seulement une valeur particulière de l'intégrale (6); savoir, celle qui sert de limite à l'intégrale (2) et que nous avons nommée valeur principale

Corollaire I. Lorsque la quantité désignée par F s'évanouit, l'intégrale (6) n'admet qu'une seule valeur, qui se réduit à zéro, en sorte qu'on a

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0\ .$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend

$$f(x)=\frac{e^{ax\sqrt{-1}}-e^{-a}}{1+x^2}=\frac{\mathrm{Cos}.ax+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.ax}{1+x^2}-\frac{e^{-a}}{1+x^2}\ ;$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Cos}.ax+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\ ax}{1+x^2}\mathrm{d}x-e^{-a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=0\ ;$$

et, par suite

$$(8)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Cos}.ax}{1+x^2}\,dx = e^{-a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \varpi e^{-a},$$

$$(9)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Sin}.ax}{1+x^2}\,dx = 0. \qquad (*)$$

Corollaire II. Si l'on désigne par $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions qui, considérées isolément, ne vérifient pas les conditions énoncées dans le théorème; mais dont la différence

$$f(x)-\varphi(x)$$

satisfasse aux conditions dont il s'agit; alors en représentant par

$$F \quad \text{et} \quad \Phi$$

les limites vers lesquelles convergent les produits

$$xf(x) \quad \text{et} \quad x\varphi(x),$$

tandis que la valeur numérique de la variable x croît de plus en plus; on aura évidemment

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-\varphi(x)]dx = \varpi(\Phi-F)\sqrt{-1},$$

et, par suite

$$(10)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx + \varpi(\Phi-F)\sqrt{-1}.$$

(*) La formule (8) a été donnée par M. Laplace. La formule (9) est évidente.

Les intégrales comprises dans cette dernière formule doivent encore être réduites à leurs valeurs principales.

Si la quantité F s'évanouit, on aura simplement

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx + \varpi\Phi.\sqrt{-1} \,.$$

Corollaire III. Supposons que l'expression

$$f(x+y\sqrt{-1})$$

s'évanouisse 1.° pour $x=\pm\infty$, quel que soit y; 2.° pour $y=\infty$, quel que soit x, mais devienne infinie pour un ou plusieurs systèmes de valeurs positives ou négatives de x, et de valeurs nulles ou positives de y. Alors, pour déterminer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \,,$$

à l'aide de la formule (10) ou (11), il suffira de trouver une fonction rationnelle de x telle que la différence

$$f(x)-\varphi(x)$$

remplisse les conditions énoncées dans le théorème. En cherchant cette fonction rationnelle, et supposant de plus $F=0$, on se trouvera conduit à la formule (3). C'est ce que l'on reconnaît sans peine, en suivant la méthode que nous allons indiquer.

Considérons d'abord le cas où l'expression (10) devient infinie pour $x=a$ et $y=b$, b représentant une quantité positive ou nulle. Faisons, pour abréger, $a+b\sqrt{-1}=x_1$, et désignons par f_1 la limite vers laquelle converge le produit $(x-x_1)f(x)$, tandis que le facteur $x-x_1$ converge vers zéro la différence

$$f(x)-\frac{f_1}{x-x_1}=\frac{(x-x_1)f(x)-f_1}{x-x_1}$$

obtiendra, en général, une valeur finie pour $x=x_1$; et si, entre les racines de l'équation

$$(12)\qquad \frac{f}{f(x)}=0,$$

la racine x_1 est la seule dans laquelle le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif, cette différence remplira les conditions énoncées dans le théorème. On pourra donc prendre

$$(13)\qquad \varphi(x)=\frac{f_1}{x-x_1}=\frac{f_1}{x-a-b\sqrt{-1}};$$

Cela posé, on trouve 1.°

$$(14)\qquad \Phi=f_1.$$

2.° si b est nul

$$(15)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=f_1\text{Sin.}\int_{-X}^{+X}\frac{f_1.dx}{x-a}=f_1.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{X-a}{X+a}\right)^2=0;$$

et, si b est positif

$$(16)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\text{Sin.}\int_{-X}^{+X}\frac{f_1dx}{x-a-b\sqrt{-1}}=f_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b\sqrt{-1}.dx}{(x-a)^2+b^2}=\varpi f_1\sqrt{-1}.$$

Par suite, l'équation (10) donnera, si b est nul,

$$(17)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\varpi f_1.\sqrt{-1}.$$

et, si b est positif

$$(18)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\varpi f_1.\sqrt{-1}.$$

Si b devenait négatif, on devrait prendre $\varphi(x)=0$, et l'on aurait, en conséquence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(cx)\mathrm{d}x=0 .$$

Pour établir les formules (17) et (18), nous avons supposé que le produit

$$(20) \qquad (x-x_1)\mathrm{f}(x)$$

convergeait vers une limite finie f_1, tandis que le facteur $x-x_1$ s'approchait indéfiniment de zéro. Supposons maintenant que le produit (20) ait une limite infinie, et que, dans la suite

$$(x-x_1)\mathrm{f}(x) , \quad (x-x_1)^2\mathrm{f}(x) , \quad (x-x_1)^3\mathrm{f}(x) , \ldots\ldots (x-x_1)^m\mathrm{f}(x) ,$$

le terme

$$(21) \qquad (x-x_1)^m\mathrm{f}(x)$$

soit le premier qui ait une limite finie. Alors, si l'on pose

$$(22) \qquad (x-x_1)^m\mathrm{f}(x)=f(x)$$

$$=f(x_1)+\frac{x-x_1}{1}f'(x_1)+\ldots+\frac{(x-x_1)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(x_1)+(x-x_1)^m\psi(x) ;$$

la fonction $\psi(x)$ conservera, en général, une valeur finie pour $x=x_1$, et remplira la condition énoncée dans le théorème. Comme on aura d'ailleurs

$$\psi(x)=\mathrm{f}(x)-\frac{f(x_1)}{1}\,\frac{1}{(x-x_1)^{m-1}}-\frac{f''(x_1)}{1.2}\,\frac{1}{(x-x_1)^{m-2}}-\ldots\ldots-\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2\ldots(m-1)}\cdot\frac{1}{x-x_1} ,$$

il est clair qu'on pourra prendre

$$(23)\qquad \varphi(x)=\frac{f'(x_1)}{1}\cdot\frac{1}{(x-x_1)^{m-1}}+\frac{f''(x_1)}{1.2}\cdot\frac{1}{(x-x_1)^{m-2}}+\dots\dots+\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2\dots.(m-1)}\cdot\frac{1}{x-x_1}.$$

En adoptant cette valeur de $\varphi(x)$, on trouvera

$$\Phi=\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\,\dots..\,(m-1)};$$

et par conséquent l'équation (14) continuera de subsister, pourvu que l'on suppose

$$(24)\qquad f_1=\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\dots.(m-1)}=\text{Sin.}\,\frac{1}{1.2.3\,\dots..\,(m-1)}\,\frac{d^{m-1}[(x-x_1)^m f(x)]}{dx^{m-1}}:$$

On trouvera encore, dans cette hypothèse, 1.° lorsque b étant nul, les expressions

$$f^{(m-2)}(x_1),\quad f^{(m-4)}(x_1),\quad f^{(m-6)}(x_1),\ \dots..$$

se réduiront toutes à zéro,

$$(25)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=0;$$

2.° lorsque, b étant nul, quelques-unes des mêmes expressions obtiendront des valeurs différentes de zéro

$$(26)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\pm\infty;$$

3.° lorsque b sera positif

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=F f_1.\sqrt{-1}.$$

Par suite, les formules (17) et (18) subsisteront encore, si la racine de l'équation (12) désignée par x_1 est une racine imaginaire, dans laquelle le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif, ou une racine réelle pour laquelle les expressions

$$f^{(m-2)}(x_1)\ ,\quad f^{(m-4)}(x_1)\ ,\quad f^{(m-6)}(x_1)\ ,\ \ldots\ldots$$

s'évanouissent.

Si, dans la racine x_1, le coefficient de $\sqrt{-1}$ était négatif, on retrouverait la formule (19).

Si l'équation (12) admettait plusieurs racines x_1, x_2, x_3, ... ; alors, pour obtenir une valeur de $\varphi(x)$ propre à remplir les conditions prescrites, il suffirait d'ajouter les valeurs de $\varphi(x)$ fournies par des équations semblables à la formule (13) ou (23), et correspondant aux diverses racines. En opérant ainsi, on se trouverait évidemment ramené à la formule (3).

Dans la seconde partie, je développerai les nombreuses conséquences qui peuvent être déduites de la formule (3).

TRIGONOMÉTRIE.

Note sur le problème de la trisection de l'angle;

Par M. Querret, professeur de Mathématiques transcendantes à la faculté des sciences de Montpellier.



On sait qu'en désignant par α un angle quelconque, on a

$$\text{Sin.}3\alpha=3\text{Sin.}\alpha-4\text{Sin}^3\alpha\ ,$$

d'où, en posant, $\text{Sin.}3\alpha=m$ et $\text{Sin.}\alpha=x$

$$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}m=0\;; \qquad (1)$$

On démontre ordinairement que cette équation a ses trois racines réelles, soit par la considération de la multiplicité des angles auxquels répond un même sinus, soit en faisant voir qu'elle tombe dans le cas irréductible.

Mais on peut aussi déduire immédiatement cette vérité de la forme même de l'équation qu'il s'agit de résoudre. Et d'abord, comme elle est d'un degré impair, elle doit avoir au moins une racine réelle.

En second lieu, parce que m est un nombre plus petit que l'unité, on doit avoir

$$1>\frac{3}{4}\mp\frac{1}{4}m\;;$$

ce qui donne

$$1-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}m>0\;, \qquad -1+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}m<0\;;$$

or les premiers membres de ces inégalités ne sont autre chose que les résultats de la substitution de $+1$ et -1 à la place de x, dans le premier membre de l'équation (1); donc, soit que cette équation ait trois racines réelles soit qu'elle n'en ait qu'une seule, elle doit avoir une racine réelle comprise entre $+1$ et -1.

Or tout nombre abstrait compris entre $+1$ et -1 peut être considéré comme le sinus tabulaire d'un certain angle, d'où il suit que nous pouvons représenter une des racines de l'équation (1) par Sin. α, ce qui donnera la condition

$$\text{Sin.}^3\alpha-\frac{3}{4}\,\text{Sin.}\alpha+\frac{1}{4}m=0\;: \qquad (2)$$

Or on peut prouver que, l'angle α étant pris de manière à satisfaire à cette condition, Sin. α, Sin. $(\frac{2}{3}\varpi+\alpha)$ et Sin. $(\frac{4}{3}\varpi+\alpha)$ se-

ront les trois racines de la proposée, ou, en d'autres termes, que l'équation (1) sera identique avec

$$\{x-\text{Sin}.\alpha\}\{x-\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\}\{x-\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)\}=0 \quad . \quad (3)$$

ou, en multipliant, avec

$$x^3\left.\begin{array}{r}-\text{Sin}.\alpha\\ -\text{Sin}.(\frac{2}{3}\varpi+\alpha)\\ -\text{Sin}.(\frac{4}{3}\varpi+\alpha)\end{array}\right|x^2\left.\begin{array}{rr}+&\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\frac{2}{3}\varpi+\alpha)\\ +&\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\frac{4}{3}\varpi+\alpha)\\ +&\text{Sin}.(\frac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\frac{4}{3}\varpi+\alpha)\end{array}\right|x-\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=0\,,$$

équation dans laquelle il s'agit présentement d'exécuter les réductions.

Or, en vertu du théorème $\text{Sin}.p+\text{Sin}.q=2\text{Sin}.\frac{1}{2}(p+q)\text{Cos}.\frac{1}{2}(p-q)$ on a d'abord

$$\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)+\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=2\text{Sin}.(\varpi+\alpha)\text{Cos}.\tfrac{1}{3}\varpi=-\text{Sin}.\alpha\ ,$$

au moyen de quoi le coefficient de x^2 s'anéantit. On conclut ensuite de là

$$\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)+\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\text{Sin}.^2\alpha\ ;$$

d'un autre côté, parce que $\text{Sin}.(\frac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\text{Sin}.(\frac{2}{3}\varpi-\alpha)$,

$$\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi-\alpha)\ ;$$

ou par la formule $\text{Sin}.(p+q)\text{Sin}.(p-q)=\frac{1}{2}(\text{Cos}.2q-\text{Cos}.2p)$,

$$\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=\tfrac{1}{2}(\text{Cos}.\tfrac{4}{3}\varpi-\text{Cos}.2\alpha)\ ,$$

ou bien

$$\text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin.}(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\text{Sin.}^2\alpha=-\tfrac{3}{4}+\text{Sin.}^2\alpha\ ;$$

au moyen de quoi le coefficient de x se réduit à $-\frac{3}{4}$.

Enfin, d'après ce dernier résultat

$$\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin.}(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\text{Sin.}\alpha(\tfrac{3}{4}-\text{Sin.}^2\alpha)$$

ou encore (2)

$$\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin.}(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=\text{Sin.}^3\alpha-\tfrac{3}{4}\text{Sin.}\alpha=-\tfrac{1}{4}m$$

de sorte que le dernier terme se réduit à $\frac{1}{4}m$. L'équation réduite est donc finalement

$$x^3-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{4}m=0\ ,$$

c'est-à-dire exactement la même que la proposée qui conséquemment doit, comme elle, avoir pour ses trois racines, $\text{Sin.}\alpha$, $\text{Sin.}(\frac{2}{3}\varpi+\alpha)$ et $\text{Sin.}(\frac{4}{3}\varpi+\alpha)$.

Si l'on avait $m=+1$ ou $m=-1$; ce qui pourrait être, l'équation deviendrait

$$x^3-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{4}=0 \quad \text{ou} \quad x^3-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{4}=0\ ;$$

elle serait satisfaite par $x=+1$ ou $x=-1$; on aurait donc $\alpha=\frac{1}{6}\varpi$ ou $\alpha=\frac{1}{2}\varpi$; les trois racines seraient donc

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{6}\varpi,\ \text{Sin.}\tfrac{5}{6}\varpi,\ \text{Sin.}\tfrac{9}{6}\varpi \quad \text{ou} \quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varpi,\ \text{Sin.}\tfrac{7}{6}\varpi,\ \text{Sin.}\tfrac{11}{6}\varpi\ ;$$

ou bien encore

$$+\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{1}{2},\ -1 \quad \text{ou} \quad +1,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}$$

c'est-à-dire que, dans l'un et dans l'autre cas, elle aurait deux racines égales. On parviendrait à la même conclusion en divisant l'équation par $x-1$ ou par $x+1$; le quotient serait

$$(x-\tfrac{1}{2})^2=0 \quad \text{ou} \quad (x+\tfrac{1}{2})^2=0\,;$$

On pourrait employer le même procédé pour démontrer la réalité de toutes les racines de l'équation

$$x^5-\tfrac{5}{4}x^3+\tfrac{5}{16}x-\tfrac{1}{16}m=0\,,$$

à laquelle conduit le problème de la quintisection de l'angle ; mais, comme le calcul est un peu long, nous ne nous y arrêterons pas.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de deux des quatre problèmes de géométrie proposés à la page 68 du XI.e volume des Annales, *et de deux autres problèmes analogues ;*

Par feu J. B. Durrande.

Lemme I. Si deux cercles se coupent orthogonalement, c'est-à-dire, de manière que les droites menées du centre de chacun à ses points d'intersection avec l'autre soient tangentes à ce dernier ; la polaire d'un point quelconque de la circonférence de l'un d'eux, prise par rapport à l'autre, passera par l'extrémité du diamètre menée par ce point.

Démonstration. Désignons par C et O tant les centres des deux cercles que ces cercles eux-mêmes, et soit I l'une de leurs intersections ; de telle sorte que CI soit une tangente au cercle O. Par

un quelconque P des points de la circonférence de ce dernier cercle, soient menés le diamètre PK et la droite PC, coupant de nouveau cette circonférence en Q. Par la propriété de la tangente et de la sécante issues d'un même point, on aura

$$CP\times CQ=\overline{CI}^2,$$

de sorte que P et Q sont deux points conjugués, par rapport au cercle C. Or, si l'on mène QK, l'angle PQK, inscrit au demicercle, sera droit; QK est donc une perpendiculaire par Q à CP; c'est donc la polaire du point P.

LEMME II. Si deux sphères se coupent orthogonalement, c'est-à-dire, de manière que la surface conique qui, ayant le centre de l'une quelconque pour sommet, passera par son intersection avec l'autre, soit circonscrite à cette dernière; le plan polaire d'un point quelconque de la surface de l'une d'elles, pris par rapport à l'autre, passera par l'extrémité du diamètre mené par ce point.

Démonstration. Désignons par C et O tant les centres des deux sphères que ces sphères elles-mêmes. Par un point quelconque O de la surface de la dernière soient menés un diamètre PK et la droite PC, perçant de nouveau cette sphère en Q. Si, par ces deux droites on conduit un plan, ses intersections avec les deux sphères seront deux cercles se coupant orthogonalement, et on prouvera, comme ci-dessus, que QK est la polaire de P, par rapport au cercle C; mais les points P et Q conjugués l'un à l'autre par rapport au cercle C, le sont aussi, par rapport à la sphère correspondante; donc le plan polaire de P, par rapport à cette sphère est un plan conduit par Q, perpendiculairement à CP; ce plan contiendra donc QK perpendiculaire à cette droite, et conséquemment il passera par le point K.

THÉORÈME I. La circonférence du cercle décrit du centre radical de trois cercles comme centre, et avec un rayon égal à

la tangente menée de ce centre à l'un d'eux, est à la fois le lieu géométrique des points du plan des trois cercles dont les polaires relatives à ces trois cercles concourent en un même point, et le lieu géométrique du point de concours des trois polaires; et ces deux points sont constamment aux extrémités d'un même diamètre de ce cercle.

Démonstration. Désignons par C, C′, C″ tant les centres des trois cercles dont il s'agit que ces cercles eux-mêmes. Soient pareillement désignés par O tant leur centre radical que le cercle décrit de ce centre avec un rayon égal à la tangente menée du même point à l'un quelconque des trois cercles. Par un quelconque P des points de la circonférence du cercle O, soient menées le diamètre PK et les droites PC, PC′, PC″, coupant de nouveau la circonférence O en Q, Q′, Q″; comme, par construction, cette circonférence coupe les trois autres orthogonalement, il s'ensuit (*Lemme I*) que, si l'on mène les droites QK, Q′K, Q″K, ces droites seront les polaires respectives du point P, par rapport aux cercles C, C′, C″; ces polaires concourront donc, en effet, en un même point K, extrémité du diamètre conduit par P.

Il est aisé de se convaincre que les points de la circonférence O sont les seuls du plan des trois cercles qui jouissent de la propriété que l'on vient de démontrer leur appartenir. Considérons en effet un point *p*, autre que ceux de cette circonférence, par lequel soit fait passer une autre circonférence *o* coupant orthogonalement les deux cercles C′ et C″; si l'on mène le diamètre *pk*, on démontrera, comme ci-dessus, que les polaires de *p* relatives à C′ et C″ concourent en *k*; mais si, au lieu d'employer, dans cette construction, les deux cercles C′ et C″, on emploie tour-à-tour les cercles C″ et C, C et C′, on trouvera deux autres points *k′* et *k″* de concours de polaires, sur des circonférences *c′* et *c″* différentes de *c*; de sorte qu'alors les trois polaires ne concourront plus au même point.

Lorsque les trois cercles se coupent de manière à avoir une par-

tie commune, leur centre radical, situé alors dans cette partie commune, leur étant ainsi intérieur à tous trois, il n'est plus possible de leur mener des tangentes de ce centre; aucun cercle ne peut donc les couper tous trois orthogonalement, et par suite il n'est aucun point de leur plan dont les trois polaires concourent en un même point.

Ce qui précède résout complètement le problème III de la page 68 du XI.e volume des *Annales*, et prouve en outre que le premier des quatre problèmes proposés en cet endroit est impossible ou indéterminé. On demande en effet, dans l'énoncé de ce problème, de *trouver le point du plan de quatre cercles dont les polaires, relatives à ces quatre cercles, concourent en un même point*. Or, s'il existe un tel point, en le joignant au point de concours des quatre polaires par une droite, le milieu de cette droite devra, par ce qui précède, être le centre radical de chacun des quatre systèmes de trois cercles que l'on peut former avec les quatre cercles donnés. Le problème ne sera donc possible qu'autant que ces quatre cercles seront tels que, pris trois à trois comme on le voudra, ils auront un seul et même centre radical; c'est-à-dire, qu'autant qu'ils pourront être coupés orthogonalement par un cinquième cercle, dont alors tous les points résoudront le problème.

THÉORÈME II. La surface de la sphère dont le centre est le centre radical de quatre sphères données et qui a pour rayon la tangente menée de ce point à l'une quelconque de ces quatre sphères, est à la fois le lieu géométrique des points de l'espace dont les plans polaires, relatifs à ces quatre sphères concourent en un même point, et le lieu géométrique du point de concours des quatre plans polaires; et ces deux points sont constamment aux extrémités d'un même diamètre de cette sphère.

Démonstration. Désignons par C, C′, C″, C‴ tant les centres des quatre sphères dont il s'agit que ces sphères elles-mêmes. Soient pareillement désignés par O tant leur centre radical que la sphère

décrite de ce centre et d'un rayon égal à la tangente menée du même point à l'une quelconque des quatre sphères données. Par l'un quelconque P des points de la surface de la sphère O, soient menés le diamètre PK et les droites PC, PC$'$, PC$''$, PC$'''$, perçant de nouveau la sphère O en Q, Q$'$, Q$''$, Q$'''$; comme, par construction, cette sphère coupe les quatre autres orthogonalement, il s'ensuit (*Lemme II*) que, si l'on conduit, par les droites QK, Q$'$K, Q$''$K, Q$'''$K, des plans respectivement perpendiculaires à PC, PC$'$, PC$''$, PC$'''$, ces plans seront les plans polaires respectifs du point P, par rapport aux sphères C, C$'$, C$''$, C$'''$; ces plans concourent donc, en effet, en un même point K, extrémité du diamètre conduit par P.

Ici encore on démontrera que les propriétés que nous venons de reconnaître appartenir aux points de la surface de la sphère O leur appartient exclusivement. Si, en effet, un point p de l'espace n'est pas sur cette surface, on pourra toujours par ce point faire passer quatre sphères o, o', o'', o''' qui coupent orthogonalement trois des sphères données. Menant alors dans ces sphères les diamètres pk, pk', pk'', pk''', on prouvera, en raisonnant comme ci-dessus, que les quatre plans polaires de p, par rapport à C, C$'$, C$''$, C$'''$, concourent trois à trois aux points k, k', k'', k''' et, que conséquemment ils ne concourent pas tous quatre en un même point.

Si les quatre sphères se coupent de manière à avoir une partie qui leur soit commune à toutes, leur centre radical, situé alors dans cette partie commune, leur étant ainsi intérieur à toutes quatre, il ne sera plus possible de leur mener des tangentes de ce centre; aucune sphère ne pourra donc les couper toutes quatre orthogonalement, et par suite, il n'y aura aucun point de l'espace dont les quatre plans polaires concourent en un même point.

Ce qui précède résout complètement le problème où l'on proposerait de *déterminer le lieu géométrique des points de l'espace dont les plans polaires, relatifs à quatre sphères données, concou-*

rent en un même point, et prouve en outre que le problème où l'on proposerait de *déterminer le point de l'espace dont les plans polaires relatifs à cinq sphères données concourent en un même point*, est toujours impossible ou indéterminé. Si en effet ces cinq sphères peuvent être toutes coupées orthogonalement par une sixième sphère, tous les points de cette dernière résoudront le problème, et, dans le cas contraire, ce problème, sera impossible (*).

Solution du problème de géométrie énoncé à la page 368 du XV.e volume du présent recueil;

Par un Abonné.

PROBLÈME. On donne l'une des faces latérales d'un tronc de prisme triangulaire, la longueur de l'arête latérale opposée, la section du tronc par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales, et par suite le volume du tronc; et l'on demande quelle doit être la situation de l'arête latérale donnée de longueur, par rapport à la face latérale opposée, pour que la somme des aires des deux bases du tronc soit un minimum ?

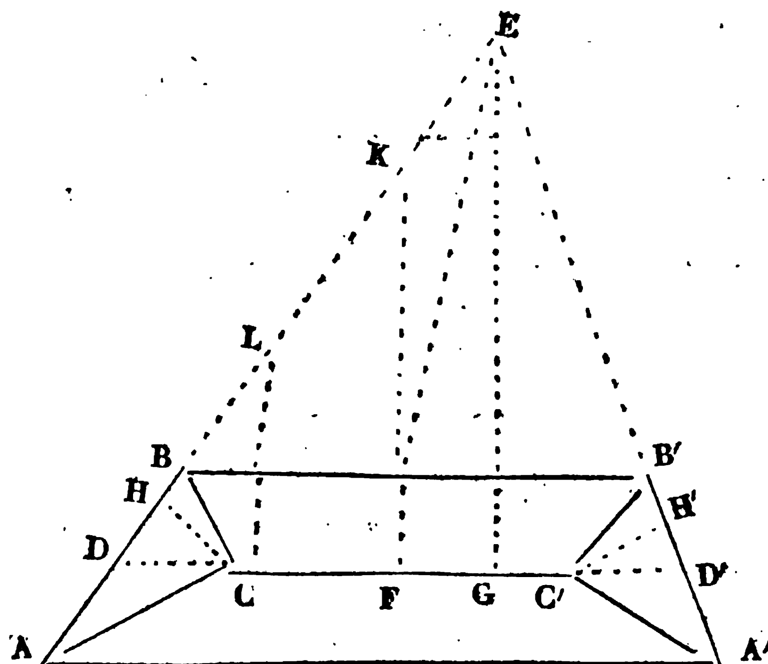
Solution. Soient ABB′A′ la face latérale donnée et CC′ la projection orthogonale, sur le plan de cette face, de l'arête latérale opposée, dans la situation qui convient au *minimum* de la somme

---

(*) M. Durrande, déjà très-gravement malade lorsqu'il nous adressa ce qu'on vient de lire, nous avait annoncé la solution de deux autres problèmes de l'endroit cité. Il a terminé sans carrière sans l'avoir pu mettre par écrit.

J. D. G.

des aires des deux bases; en menant CA, CB, C′A′, C′B′, les deux triangles ACB, A′C′B′ seront les projections des bases sur le même plan. Soient D, D′ les points où la direction CC′ rencontre les cotés AB, A′B′



de ces bases; puisqu'on connaît la section perpendiculaire aux arêtes latérales du tronc, il s'ensuit que, bien que les points C, C′ soient inconnus, on connaît néanmoins la droite DD′ ainsi que sa distance à l'arête latérale dont elle est la projection; et, comme les longueurs CC′ et DD′ sont connues, il s'ensuit qu'on connaît aussi la somme $CD+C'D'=DD'-CC'$.

Prolongeons les côtés non parallèles AB, A′B′, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en E. De ce point E, abaissons une perpendiculaire EG sur DD′; divisons en outre l'angle DED′ en deux parties égales, par une droite qui rencontre DD′ en F; imaginons enfin des

points inconnus C, C′ des perpendiculaires CH, C′H′ sur AB, A′B′.

Cela posé, il a déjà été démontré (*Annales*, tom. XIII, pag. 137) que, pour que la somme des aires des bases du tronc fût un *minimum*, il fallait que l'arête dont la projection est CC′ fût tellement située, que les plans de ces bases fussent également inclinés sur le plan de la face latérale opposée ABB′A′; ce qui se réduit évidemment à faire en sorte que les perpendiculaires CH, C′H′ soient de même longueur. Il s'agit donc de savoir de quelle manière il faudra placer les points C, C′ ou seulement l'un d'eux sur DD′, pour que cette condition soit remplie.

Les triangles rectangles semblables DGE, DHC, d'une part, et les triangles rectangles semblables D′GE, D′H′C′, d'une autre, donnent

$$DE : CD :: EG : CH = \frac{CD \times EG}{DE},$$

$$D'E : C'D' :: EG : C'H' = \frac{C'D' \times EG}{D'E};$$

puis donc qu'on doit avoir CH=C′H′, on aura, en supprimant le facteur commun EG,

$$\frac{CD}{DE} = \frac{C'D'}{D'E},$$

c'est-à-dire,

$$CD : C'D' :: DE : D'E.$$

Mais, parce que la droite EF divise l'angle DED′ en deux parties égales, on a

$$DE : D'E :: DF : D'F;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$DF : D'F :: CD : C'D'$$

d'où

$$DF+D'F : CD+C'D' :: DF : CD ;$$

c'est-à-dire,

$$DD' : DD'-CC' :: DF : CD ;$$

ce qui fournit la construction suivante :

Soient portés DD′ sur DE, de D en K, et CC′ sur KD de K en L ; soit menée KF, et, par le point L, soit menée une parallèle à cette droite ; cette parallèle rencontrera DD′ au point inconnu C ; de sorte qu'on aura alors tout ce qui est nécessaire pour construire le tronc de prisme.

Démonstration des deux théorèmes d'analise et de géometrie énoncés à la page 64 du présent volume, et du théorème de géométrie énoncé à la page 344 du volume précédent ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Montpellier.

A la page 373 du précédent volume, il a été démontré qu'en adoptant les notations abrégées

$$[\overset{n}{z}]=z(z+p)(z+2p) \,.... \,(z+\overline{n-1}.p) \,,$$

$$n!=1.2.3.4.\ldots,n\ ,$$

on avait

$$\frac{[x+y]^{m}}{m!}=\frac{[x]^{m}}{m!}+\frac{[y]^{1}}{1}\cdot\frac{[x]^{m-1}}{(m-1)!}+\frac{[y]^{2}}{2!}\cdot\frac{[x]^{m-2}}{(m-2)!}+\frac{[y]^{3}}{3!}\cdot\frac{[x]^{m-3}}{(m-3)!}+\ldots$$

Si, dans cette formule, on pose $m=x$, $p=-1$, et qu'on remette en place des divers symboles les développemens qu'ils représentent, en supprimant les facteurs communs aux deux termes des diverses fractions résultantes, il viendra

$$\frac{x+y}{1}\cdot\frac{x+y-1}{2}\cdot\frac{x+y-2}{3}\ldots\frac{y+1}{x}=\frac{x+y}{1}\cdot\frac{x+y-1}{2}\cdot\frac{x+y-2}{3}\ldots\frac{x+1}{y}$$

$$=1+\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y-2}{3}+\ldots$$

qui est, aux notations près, le théorème d'analise énoncé à la page 64 du présent volume.

Avant de passer à la démonstration du théorème de géométrie, il nous faut d'abord construire quelques formules propres à nous conduire à notre but.

Soit x l'angle au centre d'un polygone régulier de n côtés, de telle sorte qu'on ait $nx=2\varpi$; en désignant par m un nombre entier positif, plus petit que n, on aura, comme nous l'avons démontré (pag. 41).

$$\text{Cos}.mx+\text{Cos}.2mx+\text{Cos}.3mx+\ldots\ldots+\text{Cos}.nmx=0\ ,$$

$$\text{Sin}.mx+\text{Sin}.2mx+\text{Sin}.3mx+\ldots\ldots+\text{Sin}.nmx=0\ ;$$

ou, parce que $\text{Cos}.nmx=\text{Cos}.2m\varpi=1$ et $\text{Sin}.nmx=\text{Sin}.2m\varpi=0$,

$$1+\text{Cos}.mx+\text{Cos}.2mx+\text{Cos}.3mx+\ldots\ldots+\text{Cos}.(n-1)mx=0\,,\quad (A)$$

$$\text{Sin}.mx+\text{Sin}.2mx+\text{Sin}.3mx+\ldots\ldots+\text{Sin}.(n-1)mx=0\,,\quad (B)$$

Ces équations ont lieu également lorsque m est plus grand que n, pourvu qu'il n'en soit pas multiple. Si, en effet, on pose $m=qn+m'$, où on ait $m'<m$; en substituant dans les premiers membres des équations (A) et (B), et observant que généralement

$$\text{Cos}.\lambda(qn+m')x=\text{Cos}.(2\lambda q\varpi+\lambda m'x)=\text{Cos}.\lambda m'x\,,$$

$$\text{Sin}.\lambda(qn+m')x=\text{Sin}.(2\lambda q\varpi+\lambda m'x)=\text{Sin}.\lambda m'x\;;$$

ces premiers membres deviendront

$$1+\text{Cos}.m'x+\text{Cos}.2m'x+\text{Cos}.3m'x+\ldots\ldots+\text{Cos}.(n-1)m'x\,,$$

$$\text{Sin}.m'x+\text{Sin}.2m'x+\text{Sin}.3m'x+\ldots\ldots+\text{Sin}.(n-1)m'x\;;$$

et seront nuls, par ce qui précède.

En désignant toujours par x l'angle au centre d'un polygone régulier de n côtés et par a un angle quelconque ; m étant un nombre entier positif, non multiple de n, on trouvera en développant

$$\text{Cos}.ma+\text{Cos}.m(a+x)+\text{Cos}.m(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos}.m(a+\overline{n-1}.x)$$

$$=\{1+\text{Cos}.mx+\text{Cos}.2mx+\text{Cos}.3mx+\ldots\ldots+\text{Cos}.(n-1)mx\}\text{Cos}\,ma$$

$$-\{\text{Sin}.mx+\text{Sin}.2mx+\text{Sin}.3mx+\ldots\ldots+\text{Sin}.(n-1)mx\}\text{Sin}.ma\;;$$

c'est-à-dire en vertu des formules (A), (B)

$$\text{Cos}.ma+\text{Cos}.m(a+x)+\text{Cos}.m(a+2x)+\ldots+\text{Cos}.m(a+\overline{n-1}.x)=0\,.\quad (C)$$

Cela posé, on sait, comme nous l'avons déjà observé (pag. 41), que z étant un angle quelconque et p un nombre entier positif quelconque, on a

$$\text{Cos.}^p z = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}pz + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)z + \frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\text{Cos.}(p-4)z + \ldots\ldots\right\},$$

pourvu qu'on arrête le développement dès qu'on ne rencontrera plus d'arcs positifs, et que, lorsque p sera pair, on ne prenne que la moitié du terme qui contiendra l'arc nul.

Mettant successivement pour z, dans cette formule, les termes de la progression, a, $a+x$, $a+2x$, ... $a+\overline{n-1}.x$, on aura

$$\text{Cos.}^p a = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}pa + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)a + \frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\text{Cos.}(p-4)a + \ldots\ldots\right\},$$

$$\text{Cos.}^p(a+x) = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos}\,p(a+x) + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)(a+x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\},$$

$$\text{Cos.}^p(a+2x) = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos}\,p(a+2x) + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)(a+2x) + \ldots\ldots\ldots\right\};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{Cos.}^p(a+\overline{n-1}.x) = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}p(a+\overline{n-1}\,x) + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)(a+\overline{n-1}.x) + \ldots\right\};$$

ce qui donnera, en ajoutant,

$$\text{Cos.}^p a + \text{Cos.}^p\text{Cos.}(a+x) + \text{Cos.}^p(a+2x) + \ldots\ldots + \text{Cos.}^p(a+\overline{n-1}\,x)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\begin{array}{l} \text{Cos.}pa + \text{Cos.}p(a+x) + \text{Cos.}p(a+2x) + \ldots\ldots\ \text{Cos.}p(x+\overline{n-1}.x) \\ + \frac{p}{1}\left\{\text{Cos.}(p-2)a + \text{Cos.}(p-2)(a+x) + \ldots\ldots + \text{Cos.}(p-2)(a+\overline{n-1}.x)\right\} \\ + \frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\left\{\text{Cos.}(p-4)a + \text{Cos.}(p-4)(a+x) + \ldots + \text{Cos.}(p-4)(a+\overline{n-1}.x)\right\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si p est un nombre impair, non multiple de n, toutes les lignes du second membre de cette équation seront nulles, en vertu de la formule (C); de sorte qu'en remplaçant p par $2\lambda+1$, on a

$$[\text{Cos}.a]^{2\lambda+1}+[\text{Cos}.(a+x)]^{2\lambda+1}+[\text{Cos}.(a+2x)]^{2\lambda+1}+\ldots+[\text{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)]^{2\lambda+1}=0, \quad \text{(D)}$$

Si, au contraire, p est un nombre pair, les cosinus de la dernière ligne seront tous égaux à l'unité, et au nombre de n, et leur coefficient commun sera

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdots\cdots\frac{p-\frac{p-2}{2}}{\frac{p}{2}},$$

ou, en changeant p en 2λ

$$\frac{2\lambda}{1}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{2\lambda-2}{3}\cdots\cdots\frac{\lambda+1}{\lambda}.$$

Il faudra donc prendre n fois la moitié de ce coefficient, et multiplier le résultat par $\frac{1}{2^{p-1}}$ ou par $\frac{1}{2^{2\lambda-1}}$; ce qui revient à multiplier de suite ce coefficient, tout entier par $\frac{n}{2^{2\lambda}}$. On a donc

$$[\text{Cos}.a]^{2\lambda}+[\text{Cos}(a+x)]^{2\lambda}+[\text{Cos}.(a+2x)]^{2\lambda}+\ldots\ldots+[\text{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)]^{2\lambda}$$

$$=\frac{n}{2^{2\lambda}}\cdot\frac{2\lambda}{1}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{2\lambda-2}{3}\cdots\cdots\frac{\lambda+1}{\lambda}. \qquad \text{(E)}$$

En conséquence, si l'on fait successivement λ égal à 0, 1, 2, 3, ,............, on tirera des formules (D) et (E)

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Cos.}a+\text{Cos.}(a+x)+\text{Cos.}(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}(a+\overline{n-1}.x)=0\;, \\
\text{Cos.}^2a+\text{Cos.}^2(a+x)+\text{Cos.}^2(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}^2(a+\overline{n-1}.x)=\frac{2}{1}\cdot\frac{n}{2^2}\;, \\
\text{Cos.}^3a+\text{Cos.}^3(a+x)+\text{Cos.}^3(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}^3(a+\overline{n-1}.x)=0\;, \\
\text{Cos.}^4a+\text{Cos.}^4(a+x)+\text{Cos.}^4(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}^4(a+\overline{n-1}.x)=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2^4}\;, \\
\text{Cos.}^5a+\text{Cos.}^5(a+x)+\text{Cos.}^5(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}^5(a+\overline{n-1}.x)=0\;, \\
\text{Cos.}^6a+\text{Cos.}^6(a+x)+\text{Cos.}^6(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}^6(a+\overline{n-1}.x)=\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{n}{2^6}\;, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(F)$$

Soit présentement une circonférence, dont C soit le centre et r le rayon, divisée en n parties égales aux points P_1, P_2, P_3, ... P_n; et soit O un point du plan de cette circonférence distant de son centre de la quantité k. Soient menées les droites OP_1, OP_2, OP_3, ... OP_n, et les rayons CP_1, CP_2, CP_3, ... CP_n; soit x l'angle de deux rayons consécutifs, et soit a l'angle que fait le premier CP_1 avec la droite CO. Les triangles OCP_1, OCP_2, OCP_3, ... OCP_n, qui ont tous le côté commun CO, donneront

$$\overline{OP_1}^2=k^2+r^2-2kr\text{Cos.}a\;,$$

$$\overline{OP_2}^2=k^2+r^2-2kr\text{Cos.}(a+x)\;,$$

$$\overline{OP_3}^2=k^2+r^2-2kr\text{Cos.}(a+2x)\;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{OP_n}=k^2+r^2-2kr\text{Cos.}(a+\overline{n-1}.x)\;.$$

En désignant par m un nombre entier positif, plus petit que n, on conclura de là

$$\overline{OP}_1^{2m}+\overline{OP}_2^{2m}+\overline{OP}_3^{2m}+\ldots\ldots+\overline{OP}_n^{2m}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}[(k^2+r^2)-2kr\text{Cos}.a]^m\\+[(k^2+r^2)-2kr\text{Cos}.(a+x)]^m\\+[(k^2+r^2)-2kr\text{Cos}.(a+2x)]^m\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+[(k^2+r^2)-2kr\text{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)]^m\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(k^2+r^2)^m-2\frac{m}{1}kr(k^2+r^2)^{m-1}\text{Cos}.a+4\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\text{Cos}.^2a+\ldots\\+(k^2+r^2)^m-2\frac{m}{1}kr(k^2+r^2)^{m-1}\text{Cos}.(a+x)+4\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\text{Cos}.^2(a+x)+\ldots\\+(k^2+r^2)^m-2\frac{m}{1}kr(k^2+r^2)^{m-1}\text{Cos}.(a+2x)+4\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\text{Cos}.^2(a+2x)+\ldots\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+(k^2+r^2)^m-2\frac{m}{1}kr(k^2+r^2)^{m-1}\text{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)+4\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\text{Cos}.^2(a+\overline{n-1}.x)+\ldots\end{array}\right.$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
n(k^2+r^2)^m \\
-2\,\frac{m}{1}\,kr(k^2+r^2)^{m-1}[\text{Cos.}a+\text{Cos.}(a+x)+\text{Cos.}(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}(a+\overline{n-1}.x)] \\
+4.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}[\text{Cos.}^2a+\text{Cos.}^2(a+x)+\text{Cos.}^2(a+2x)+\ldots\ldots\ldots+\text{Cos.}^2(a+\overline{n-1}.x)] \\
-8.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\,k^3r^3(k^2+r^2)^{m-3}[\text{Cos.}^3+\text{Cos.}^3(a+x)+\text{Cos.}^3(a+2x)+\ldots+\text{Cos.}^3(a+\overline{n-1}.x)] \\
+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm 2^m k^m r^m[\text{Cos.}^m a+\text{Cos.}^m(a+x)+\text{Cos.}^m(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}^m(a+\overline{n-1}.x)]\,.
\end{array}\right\}
$$

En vertu des formules (F), cette équation devient

$$
\overline{\text{OP}_1}^{2m}+\overline{\text{OP}_2}^{2m}+\overline{\text{OP}_3}^{2m}+\ldots\ldots+\overline{\text{OP}_n}^{2m}
$$

$$
\begin{array}{l}
=n(k^2+r^2)^m \\
+\frac{2}{1}\cdot\frac{n}{2^2}.2^2.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2} \\
+\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2^4}.2^4.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\,k^4r^4(k^2+r^2)^{m-4} \\
+\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{n}{2^6}.2^6.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot\frac{m-5}{6}\,k^6r^6(k^2+r^2)^{m-6} \\
+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

ou bien, en réduisant

$$\overline{OP}_1^{\,2m}+\overline{OP}_2^{\,2m}+\overline{OP}_3^{\,2m}+\dots\dots+\overline{OP}_n^{\,2m}$$

$$=n\left\{(k^2+r^2)^m+\frac{2}{1}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}+\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}k^4r^4(k^2+r^2)^{m-4}+\dots\right\}.$$

En développant les diverses puissances de k^2+r^2, dans le second membre, et réunissant les termes affectés des mêmes puissances de k et de r dans le développement, le terme général de ce développement, c'est-à-dire, le terme affecté de $k^{2t}r^{2m-2t}$ sera

$$n\left\{\begin{array}{l}
\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-t+1}{t}\\
+\frac{2}{1}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdots\cdots\frac{m-t}{t-1}\\
+\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdots\cdots\frac{m-t-1}{t-2}\\
+\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot\frac{m-5}{6}\times\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdots\cdots\frac{m-t-2}{t-3}\\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}k^{2t}r^{2m-2t}$$

On peut, en préparant convenablement les termes du coefficient, faire en sorte que le facteur

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-t+1}{t}$$

leur devienne commun, et alors, en mettant ce facteur en évidence, le terme général devient

$$n.\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-t+1}{t}\left\{1+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{t}{1}+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{m-t-1}{2}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{m-t-1}{2}\cdot\frac{m-t-2}{3}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t-2}{3}+\dots\right\}k^{2t}r^{2m-2t}$$

Mais si, dans la formule d'analise que nous avons démontrée au commencement de cet article, savoir :

$$1+\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y-2}{3}+\ldots=\frac{x+y}{1}\cdot\frac{x+y-1}{2}\cdots\frac{x+1}{y},$$

on fait $x=m-t$ et $y=t$, elle deviendra

$$1+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{t}{1}+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{m-t-1}{2}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}+\ldots=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-t+1}{t},$$

au moyen de quoi notre terme général se réduit à

$$n\left(\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdot\frac{m-t+1}{t}k^tr^{m-t}\right)^2$$

de sorte qu'on a finalement

$$\overline{OP}_1^{2m}+\overline{OP}_2^{2m}+\overline{OP}_3^{2m}+\ldots+\overline{OP}_n^{2m}$$

$$=n\left\{\left(r^m\right)^2+\left(\frac{m}{1}kr^{m-1}\right)^2+\left(\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^{m-2}\right)^2+\left(\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}k^3r^{m-3}\right)^2+\ldots\right\}$$

qui est précisément le théorème énoncé à la page 344 du précédent volume, que nous nous étions proposés de démontrer.

En faisant $m=1$, on trouve

$$\overline{OP}_1^2+\overline{OP}_2^2\quad\overline{OP}_3^2+\ldots\ldots+\overline{OP}_n^2=n(r^2+k^2),$$

ce qui donne une expression bien simple de la somme des quarrés des droites menées aux sommets d'un polygone régulier d'un point quelconque de son plan, et montre que cette somme est la même pour tous les points également distants du centre du po-

lygone, comme M. Sturm l'avait déjà remarqué (tom. XV, pag. 256).

Si le point O coïncide avec l'un des sommets du polygone, deux des droites OP_1, OP_2, OP_3, ... OP_n en sont des côtés et les autres sont des diagonales; mais alors $k=r$; en désignant donc par c l'un des côtés du polygone et par d_1, d_2, d_3, ... d_{n-3} les diagonales menées d'un sommet à tous les autres, on aura

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+ \ldots\ldots +d^2_{n-3}+2c^2=2nr^2 ;$$

d'où

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+ \ldots\ldots +d^2_{n-3}=2(nr^2-c^2) .$$

Si, par exemple, il s'agit de l'hexagone régulier, ou $n=6$ et $c=r$, on aura

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2=10r^2 ;$$

mais ici l'on a $d_2=2r$ et $d_3=d_1$; donc

$$2d_1^2+4r^2=10r^2 ,$$

ou $$d_1^2=3r^2 \quad \text{et} \quad d_1=r\sqrt{3} ,$$

comme on doit l'avoir en effet.

THÉORÈME. Un polygone quelconque étant circonscrit à un cercle, et un autre cercle étant concentrique à celui-là; la somme des produits des côtés du polygone par les quarrés des distances d'un point quelconque de la circonférence du second cercle aux points de contact de ces côtés avec le premier, est une quantité constante.

Démonstration. Soit O le centre commun des deux cercles; soit r le rayon de celui auquel le polygone est circonscrit, et soit R le rayon de l'autre. Représentons par a, b, c, ... les côtés consécutifs du polygone; et désignons leurs points de contact par A,

B, C, ... Soit enfin P un point pris arbitrairement sur la circonférence dont le rayon est R ; et représentons respectivement par α, β, γ, ... les angles POA, POB, POC, ... parce que les angles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux, les angles α, β, γ, ... seront aussi ceux que feraient les côtés a, b, c, ... du polygone avec une perpendiculaire indéfinie menée à OP, par le point O, de sorte qu'on aura, par un théorème connu (*).

$$a\text{Cos}.\alpha+b\text{Cos}\,\beta+c\text{Cos}\,\gamma+\ldots\ldots=0\,. \qquad (1)$$

Cela posé, les triangles POA, POB, POC, ... donnent

$$\overline{\text{PA}}^2=R^2+r^2-2rR\text{Cos}.\alpha\,,$$

$$\overline{\text{PB}}^2=R^2+r^2-2rR\text{Cos}\,\beta\,,$$

$$\overline{\text{PC}}^2=R^2+r^2-2rR\text{Cos}.\gamma\,,$$

. . . .

Prenant la somme des produits respectifs de ces équations par a, b, c, ... et ayant égard à la relation (1), il viendra

$$\overline{\text{PA}}^2.a+\overline{\text{PB}}^2.b+\overline{\text{PC}}^2.c+\ldots\ldots=(R^2+r^2)(a+b+c+\ldots\ldots)\,, \quad (2)$$

équation dont le second membre est indépendant du point P, sur la circonférence dont le rayon est R, comme l'annonce le théorème qui se trouve ainsi démontré.

Si le polygone était régulier, en représentant par n le nombre de ses côtés, l'équation (2) deviendrait

---

(*) Voyez, entre autres, la pag. 310 du XV.e volume du présent recueil. J. D. G.

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\ldots\ldots=n(R^2+r^2)\ .$$

Si le point P était pris sur la circonférence même du cercle inscrit, on aurait $R=r$, et conséquemment

$$\overline{PA}^2.a+\overline{PB}^2.b+\overline{PC}^2.c+\ldots=2r^2(a+b+c+\ldots)$$

et si, en outre le polygone était régulier, on aurait

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\ldots=2nr^2\ .$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de trigonométrie.

Soit un triangle sphérique quelconque ABC, et soit P un point de la sphère disposé d'une manière quelconque par rapport à ce triangle. Soient en outre A′, B′, C′ respectivement, les points où les côtés BC, CA, AB, sont coupés par les arcs de grands cercles AP, BP, CP. On propose de démontrer que

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\mathrm{Sin.PA'}}{\mathrm{Sin.AA'}}\right)^2+2\dfrac{\mathrm{Sin.PB'}}{\mathrm{Sin.BB'}}\cdot\dfrac{\mathrm{Sin.PC'}}{\mathrm{Sin.CC'}}\,\mathrm{Cos.BC}\\ +\left(\dfrac{\mathrm{Sin.PB'}}{\mathrm{Sin.BB'}}\right)^2+2\dfrac{\mathrm{Sin.PC'}}{\mathrm{Sin.CC'}}\cdot\dfrac{\mathrm{Sin.PA'}}{\mathrm{Sin.AA'}}\,\mathrm{Cos.CA}\\ +\left(\dfrac{\mathrm{Sin.PC'}}{\mathrm{Sin.CC'}}\right)^2+2\dfrac{\mathrm{Sin.PA'}}{\mathrm{Sin.AA'}}\cdot\dfrac{\mathrm{Sin.PB'}}{\mathrm{Sin.BB'}}\,\mathrm{Cos.AB}\end{array}\right\}=1.$$

ANALISE TRANSCENDANTE.

Exposition des principes du calcul des variations (*) ;

Par M. AMPÈRE, de l'Académie royale des sciences de Paris, de celles d'Edimbourg, de Cambridge, de Genève, etc., professeur au Collége de France et à l'École polytechnique.

§. I. *Notions Générales.*

1. DANS le calcul différentiel proprement dit, on ne fait varier, dans les fonctions qu'on y considère, que les seules variables x, y, z ; c'est-à-dire, les coordonnées de certaines courbes ou surfaces déterminées, ce qui répond à des points déterminés de ces mêmes surfaces, pour lesquels on enseigne ce que signifient les différentielles de ces coordonnées ; et on y enseigne également à déterminer les différentielles de toutes sortes de fonctions.

Mais, dans une fonction telle, par exemple, que

$$y=\mathrm{f}(x\,,\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,....)\;;$$

(*) Cette exposition a été rédigée par l'auteur, pour son cours d'analise à l'Ecole polytechnique. On peut aussi consulter, sur le même sujet, un mémoire inséré au commencement du XIII.e volume du présent recueil.

J. D. G.



rien n'empêche de faire varier les paramètres a, b, c, ... ; et dès lors on sort de la courbe où l'on était d'abord, pour passer à une autre courbe voisine de celle-là. On peut obtenir ainsi une infinité de nouvelles courbes, suivant les valeurs diverses qu'on attribuera à a, b, c, ... On rencontre déjà des exemples de pareils changemens dans la recherche des solutions particulières des équations différentielles, où l'on différentie les équations des courbes par rapport à leurs paramètres, afin que les nouveaux coefficiens différentiels ainsi obtenus donnent, en les égalant à zéro, les solutions particulières demandées.

Si on ne fait varier que les paramètres, dans une courbe

$$y=f(x, a, b, c, ...);$$

cette courbe se trouvera transportée, suivant ses ordonnées, de AB en A′B′ (fig. 1). On peut alors chercher l'augmentation de l'ordonnée ou de y, qui est MM′. On peut aussi demander l'augmentation de dy qui de TQ est devenue T′Q′, l'augmentation du rayon de courbure, etc. On pourrait bien se contenter, pour les questions de géometrie, de faire varier les courbes de la sorte, en suivant les ordonnées ; mais ce point de vue n'est pas assez général pour les questions de mécanique. On suppose alors que tous les points d'une courbe se transportent sur une autre courbe, en décrivant eux-mêmes des courbes intermédiaires MM, mm' (fig 2). Alors, en même temps qu'on fait varier les paramètres, on fait aussi varier l'abcisse. Ce sont les accroissemens que l'on donne, soit aux paramètres soit aux variables dépendantes, que l'on appelle leurs *variations*, et que l'on désigne par la caractéristique δ. Par analogie avec les dénominations admises dans le calcul différentiel, nous appellerons variation de la fonction la quantité à laquelle se réduit son accroissement total, lorsqu'on en supprime les termes affectés des puissances supérieures de δx, δa, δb, ... D'après cette



définition, u étant une fonction quelconque de x, a, b, ... de même qu'on a

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{da}da + \frac{du}{db}db + \ldots\,,$$

on aura aussi

$$\delta u = \frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{da}\delta a + \frac{du}{db}\delta b + \ldots\,.$$

Il est inutile de mettre $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta u}{\delta a}$, ... au lieu de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, ... ; parce que ces derniers rapports, étant indépendans des accroissemens donnés à x, a, ..., restent les mêmes, quels que soient ces accroissemens.

La courbe A′B′, sur laquelle on transporte la courbe AB, n'a pas besoin d'être de même forme que celle-ci, pour qu'on puisse prendre sur elle les variations comme nous venons de le dire. En effet, on peut développer en séries les ordonnées de ces deux courbes, comme on le voit ici

pour la courbe AB, $\quad y = b + \frac{b'}{1}(x-\alpha) + \frac{b''}{1.2}(x-\alpha)^2 + \ldots\,,$

pour la courbe A′B′, $\quad y' = B + \frac{B'}{1}(x-\alpha) + \frac{B''}{1.2}(x-\alpha)^2 + \ldots\,.$

Elles sont ainsi présentées sous la même forme, ayant un nombre infini de paramètres b, b', b'', ..., B, B', B'', ... Or, ce que nous avons dit tout à l'heure, étant tout-à-fait indépendant du nombre des paramètres, rien n'empêche de supposer $B = b + \delta b$, $B' = b' + \delta b'$, $B'' = b'' + \delta b''$, ..., et par conséquent de regarder

la courbe $A'B'$ comme étant la variation de la première AB (*).

§. II. *Construction des formules.*

Soient $PP' = \delta x$, $Pp = dx$; on aura (fig. 2)

$$d\delta x = P'p' - Pp = (pp' + pP') - (PP' + pP') = pp' - PP' ;$$

$$\delta dx = pp' - PP' ,$$

d'où l'on conclura

$$d\delta x = \delta dx ;$$

c'est-à-dire que *la différentielle de la variation est égale à la variation de la différentielle.*

Le même théorème a lieu pour les fonctions. En effet, soit

$$y = f(x, a, b, c, \ldots) ,$$

qui donne

$$dy = \frac{dy}{dx} dx ;$$

Si nous appliquons à cette équation une variation, en nous rappe-

(*) Il est bien essentiel de remarquer que les courbes pour lesquelles il s'agit de prouver que l'une peut être considérée comme la variation de l'autre, sont des courbes individuelles, c'est-à-dire, à paramètres invariables ou numériques. Il est bien clair alors que les coefficiens du développement, par la suite de Maclaurin, doivent être regardés comme indépendans les uns des autres, puisque ces b, b', b'', ... B, B', B'', ... sont numériques. Si l'on pouvait donner diverses valeurs aux paramètres des deux courbes que nous considérons, les coefficiens du développement dépendraient les uns des autres, et on ne pourrait plus regarder les coefficiens du second développement comme résultant de la variation de ceux du premier.

lant que, d'après la définition de la variation, semblable à celle de la différentielle,

$$\delta . uv = v\delta u + u\delta v,$$

nous aurons

$$\delta dy = \frac{dy}{dx}\delta dx + dx\delta\frac{dy}{dx},$$

c'est-à-dire,

$$\delta dy = \frac{dy}{dx}\delta dx + dx\left(\frac{d^2y}{dx^2}\delta x + \frac{d^2y}{dxda}\delta a + \frac{d^2y}{dxdb}\delta b + \dots\right).$$

Mais, d'un autre côté

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\delta x + \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + \dots;$$

En différentiant cette dernière équation et observant que, puisque la différentielle se prend le long de la courbe, en ne faisant varier que x et y, il s'ensuit que δa, δb, ... doivent ici être considérées comme des constantes, on aura

$$d\delta x = \frac{dy}{dx}d\delta x + dx\left(\frac{d^2y}{dx^2}dx + \frac{d^2y}{dadx}\delta a + \frac{d^2y}{dbdx}\delta b + \dots\right).$$

En comparant entre eux les développemens de δdy et de $d\delta y$, en observant que, d'après ce qui a été prouvé ci-dessus,

$$\frac{dy}{dx}\delta dx = \frac{dy}{dx}d\delta x$$

et que d'ailleurs, parce que l'ordre des différentiations est indifférent,

$$\frac{d^2y}{dxda} = \frac{d^2y}{dadx}, \quad \frac{d^2y}{dxdb} = \frac{d^2y}{dbdx}, \ldots$$

on verra que ces deux développemens sont égaux, et qu'ainsi

$$d\delta y = \delta dy.$$

On peut tirer de ceci une conclusion semblable, par rapport au signe d'intégration. Soit, en effet

$$\int v dx = u, \quad \text{d'où} \quad v dx = du,$$

donc

$$\delta . v dx = \delta du = d\delta u;$$

d'où, en intégrant,

$$\int \delta . v dx = \delta u = \delta \int v dx.$$

Ainsi, on peut intervertir l'ordre des signes $\int$ et δ.

La courbe AB ayant été transportée sur A′B′ (fig. 3), de manière que les points M et m soient venus en M′ et m'; si nous menons les tangentes MT et MS, aux courbes MB et MM′; il est clair, d'après la définition que nous avons donnée de δy, qui est, du reste,

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\delta x + \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + \ldots;$$

il est clair, disons nous, que $\delta y = SQ$; puisque ce doit être la partie de M′Q qui ne contient pas les termes infiniment petits par rapport aux premiers. Mais, si l'on suppose que la position A′B′ soit infiniment voisine de la position AB, on aura, à la limite,

$$\delta y = \text{M'Q}\,, \quad \frac{dy}{dx}\,\delta x \quad \text{ou} \quad p\delta x = \text{HQ}\,,$$

donc

$$\delta y - p\delta x = \text{M'Q} - \text{HQ} = \text{M'H}\,;$$

De même

$$\frac{dy}{dx}\,\delta x = p\delta x = \text{TQ}$$

sera, à la limite, la distance des deux courbes. Or, on sait déjà que

$$\delta y - p\delta x = \frac{dy}{da}\,\delta a + \frac{dy}{db}\,\delta b + \ldots.$$

Nous représenterons désormais par ω cette quantité, dépendant seulement de la variation des paramètres; quantité qui, lorsque les variations deviennent infiniment petites, représente, ainsi que nous venons de le voir, la distance entre les deux courbes. Nous aurons donc ainsi

$$\delta y = p\delta x + \omega\,;$$

c'est cet ω qui reste seul, quand on suppose $\delta x = 0$, et que les paramètres seuls varient.

Comme p est une fonction de x, de même qu'on a établi

$$\delta y = p\delta x + \omega\,,$$

on peut poser aussi

$$\delta p = q\delta x + \omega'\,,$$

$$\delta q = r\delta x + \omega''\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Enfin si V est une fonction de x, y, p, q, ... ; comme on peut toujours exprimer y, p, q, ... en fonction de x seul, et par conséquent V aussi ; on aura de même

$$\delta V = \left[\frac{dV}{dx}\right]\delta x + \Omega\,;$$

ou $\left[\frac{dV}{dx}\right]$ représente la différentielle de V par rapport aux x non seulement en évidence, mais même contenus dans y, p, q, ...

Il existe des relations remarquables entre ces ω, ω', ω'', ...Ω. Soit, en effet, comme ci-dessus

$$y = f(x, a, b, c, ...) \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = p\,,$$

d'où

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\delta x + \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + ...$$

et

$$\omega = \delta y - p\delta x = \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + ...$$

On entend par $\frac{d\omega}{dx}$ la dérivée de cette fonction de x, a, b, ... δa, δb, ... en n'y faisant varier que x, parce que

$$\delta a = a' - a\,, \qquad \delta b = b' - b\,, ...$$

sont constantes, quand a, b, ... a', b', ... le sont. Ainsi

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d^2y}{da\,dx}\delta a + \frac{d^2y}{db\,dx}\delta b + ...$$

D'un autre côté, $p=\frac{dy}{dx}$ étant une fonction de x, a, b, ... on a

$$\delta p=\frac{d^2y}{dx^2}\delta x+\frac{d^2y}{dxda}\delta a+\frac{d^2y}{dxdb}\delta b+\ldots\ldots;$$

en se rappelant donc que

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=q,$$

et qu'en outre

$$\frac{d^2y}{dxda}=\frac{d^2y}{dadx}, \qquad \frac{d^2y}{dxdb}=\frac{d^2y}{dbdx}, \ldots\ldots$$

on trouve

$$\delta p=q\delta x+\frac{d\omega}{dx};$$

On trouvera de même

$$\delta q=r\delta x+\frac{d^2\omega}{dx^2}$$

. . . .

d'où l'on voit que

$$\omega'=\frac{d\omega}{dx}, \qquad \omega''=\frac{d^2\omega}{dx^2}, \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

(*) Il est essentiel de remarquer que a', b', ..., étant de nouvelles valeurs de a, b, ..., sont constantes, dans les différentiations relatives à d; et que $\delta a=a'-a$, $\delta b=b'-b$, ...; parce que, dans les différentiations relatives à δ, les quantités a, b, ... sont, dans la fonction $y=f(x, a, b, \ldots;)$ et dans ses dérivées, des variables indépendantes, pour lesquelles les différentielles marquées par δa, δb, ... sont la même chose que les différences entières représentées par $a'-a$, $b'-b$, ...

Pour $V=F(x, y, p, q, \ldots)$, où les paramètres a, b, c, ... entrent implicitement, on a

$$\delta V = \left[\frac{dV}{dx}\right]\delta x + \left[\frac{dV}{da}\right]\delta a + \left[\frac{dV}{db}\right]\delta b + \ldots ;$$

mais, en désignant par M, N, P, Q, ... les coefficiens différentiels de V par rapport aux x, y, p, q, ... en évidence, on a

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \ldots ;$$

$$\left[\frac{dV}{dx}\right] = M + Np + Pq + Qr + \ldots ;$$

et il en résulte

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots .$$

Si nous substituons pour δy, δp, δq, ... les valeurs précédemment obtenues, il en résultera

$$\delta V = (M + Np + Pq + Qr + \ldots)\delta x + N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots ;$$

valeur qui, comparée à

$$\delta V = \left[\frac{dV}{dx}\right]\delta x + \left[\frac{dV}{da}\right]\delta a + \left[\frac{dV}{db}\right]\delta b + \ldots = \left[\frac{dV}{dx}\right]\delta x + \Omega ,$$

fait voir que

$$\Omega = N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots$$

La variation de V, savoir :

$$\delta V = (M + Np + Pq + Qr + \ldots)\delta x + N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots$$

une fois trouvée, celle de l'intégrale $\int V dx$ est facile à en déduire. On sait en effet que

$$\delta \int V dx = \int \delta(V dx) = \int(\delta V . dx + V \delta dx) = \int (V d\delta x + \delta V . dx) ,$$

substituant pour δV la valeur que nous venons d'obtenir, on aura

$$\delta \int V dx = \int \left\{ V d\delta x + \left[\frac{dV}{dx} \right] dx \delta x + N\omega dx + P\frac{d\omega}{dx} dx + Q \frac{d^2\omega}{d^2x} dx + \ldots \right\} :$$

Or, en premier lieu,

$$\int \left(V d\delta x + \left[\frac{dV}{dx} \right] dx\delta x \right) = V\delta x ;$$

on trouve ensuite, en intégrant par parties,

$$\int P \frac{d\omega}{dx} dx = P\omega - \int \frac{dP}{dx} \omega dx ,$$

$$\int Q \frac{d^2\omega}{dx^2} dx = Q \frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx}\omega + \int \frac{d^2Q}{dx^2} \omega dx ,$$

$$\int R \frac{d^3\omega}{dx^3} dx = R\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{dR}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\omega - \int \frac{d^3R}{dx^3} \omega dx ,$$

. . . .

réunissant alors tous ces termes, on aura finalement

$$\delta \int V dx = V\delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots \right)\omega + \left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots \right) \frac{d\omega}{dx} + \ldots$$

$$+\int\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\ldots\right)\omega dx\,.$$

§. III. *Application aux questions de* maxima *et* minima.

La dernière formule que nous venons d'obtenir sert à résoudre une des questions les plus importantes du calcul des variations, celle des *maxima* et *minima*. Une partie de cette question ressort du calcul différentiel ; mais cette partie est peu étendue ; elle ne comprend que le cas où l'on demande le *maximum* ou le *minimum* d'une fonction dans laquelle on ne fait varier que les variables courantes x, y, ... Ainsi, ce sera la détermination de l'ordonnée *maximum* ou *minimum* d'une certaine courbe ou d'une certaine surface. Mais si, dans une fonction, on fait varier les constantes ou paramètres, on peut se demander quelles sont les valeurs à leur attribuer, pour que la fonction jouisse d'une certaine propriété à un degré *maximum* ou *minimum*. Cette importante question a beaucoup occupé les géomètres du dernier siècle. Euler l'a résolue, en partie, dans un ouvrage ayant pour titre : *Methodus inveniendi*, etc.

Or, la série de Taylor donne, comme on sait, dans le cas de plusieurs variables, et conséquemment pour

$$u=f(x,\ y,\ p,\ q,\ \ldots\ a,\ b,\ c,\ \ldots),$$

$$f(x+\delta x,\ y+\delta y,\ p+\delta p,\ q+\delta q,\ \ldots\ a+\delta a,\ b+\delta b,\ c+\delta c,\ \ldots)$$

$$=u+\frac{du}{dx}\delta x+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{\delta x^2}{1.2}\quad+\ldots\ldots$$

$$+\frac{du}{dy}\delta y+2\frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{\delta x\delta y}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{du}{dp}\delta p+\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{\delta y^2}{1.2}\quad+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots+2\frac{d^2u}{dxdp}\cdot\frac{\delta p\delta x}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{du}{da}\delta a+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

$$+\frac{du}{db}\delta b+2\frac{d^2u}{dxda}\cdot\frac{\delta x\delta a}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

ou bien

$$U=u+\frac{\delta u}{1}+\frac{\delta^2 u}{1.2}+\frac{\delta^3 u}{1.2.3}+\ldots,$$

en désignant par δ^2u la variation de δu, par δ^3u celle de δ^2u, et ainsi de suite.

Or, si U est un *maximum* ou un *minimum*, on sait que δu doit être nul, puisqu'il ne contient que les premières puissances des variations δx, δy, ..., et change conséquemment de signe avec elles. Au contraire δ^2u n'en devra pas changer, puisqu'il contient ces variations à la seconde puissance.

Quand on demande le *maximum* ou le *minimum* d'une fonction, on ne peut souvent exprimer cette fonction que par des intégrales définies, entre les limites où la fonction doit avoir lieu. Il faut alors considérer le développement de la série de Taylor relatif à $\int V\mathrm{d}x$, savoir :

$$\int V\mathrm{d}x+\frac{\delta\int V\mathrm{d}x}{1}+\frac{\delta^2\int V\mathrm{d}x}{1.2}+\frac{\delta^3\int V\mathrm{d}x}{1.2.3}+\ldots$$

S'il y a *maximum* ou *minimum*, il faut que $\delta\int V\mathrm{d}x=0$. Les valeurs de δx, δy, ... qui satisfont à cette condition, devront rendre, en outre, $\delta^2\int V\mathrm{d}x$ *négatif*, dans le cas du *maximum*, et *positif* dans le cas du *minimum*.

Il est encore à remarquer que, si le *maximum* ou le *minimum* doit avoir lieu entre certaines limites, non seulement $\int V\mathrm{d}x$ mais aussi

$$\delta\int V\mathrm{d}x\,,\qquad \delta^2\int V\mathrm{d}x\,,\qquad \delta^3\int V\mathrm{d}x\,,\ldots$$

devront être pris entre ces limites. Or nous avons trouvé ci-dessus

$$\delta\int V\mathrm{d}x=V\delta x+\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-\ldots\right)\omega+\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}+\ldots$$
$$+\int\left(N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\ldots\right)\omega\mathrm{d}x\,;$$

et si nous nous rappelons que

$$\omega=\delta y-p\delta x\,,\qquad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}=\delta p-q\delta x\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}x^2}=\delta q-r\delta x\,,\ldots\ldots;$$

il viendra, en substituant,

$$0=\delta\int V\mathrm{d}x=\left\{V-P\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-\ldots\right)-q\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)-r\left(R-\ldots\right)-\ldots\right\}\delta x$$
$$+\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-\ldots\right)\delta y+\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)\delta p+\left(R-\ldots\right)\delta q+\ldots$$
$$+\int\left(N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}+\ldots\right)\omega\mathrm{d}x\,,$$

qu'il faudra prendre entre les limites données.

Il se présente ici plusieurs cas à examiner.

1.° Supposons d'abord que l'on donne, pour les deux limites, les valeurs x', x'', y', y'', p', p'', ... de x, y, p, ... Alors, ces valeurs extrêmes étant fixes, leurs variations seront nulles, de sorte que l'équation à laquelle nous venons de parvenir se réduira simplement à

$$\int\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\ldots\ldots\right)\omega dx=0 .$$

Or, on ne peut supposer $\omega=0$, parce que, sous le signe $\int$, c'est le ω courant, et qu'il ne peut être nul qu'aux limites; il faut donc que

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\ldots.=0 ; \qquad \text{(A)}$$

de sorte que cette équation sera l'équation différentielle du *maximum* ou du *minimum* cherché. Mais si

$$V=f(x,y,p,q,\ldots..)$$

contient un coefficient différentiel de l'ordre n, il est clair que cette équation sera de l'ordre $2n$, de sorte qu'en l'intégrant elle donnera $2n$ constantes arbitraires; or, comme aux deux limites x', x'', il faut qu'elle reproduise y', y'', p', p'', q', q'', ... (*) en nombre $2n$, on aura $2n$ relations pour déterminer les $2n$ constantes arbitraires introduites par l'intégration; et on le pourra aisément.

(*) On ne donne que $2n-2$ coefficiens différentiels p', p'', q', q'', ..., s'il doit y en avoir n dans l'équation indéfinie; parce que les conditions de $y=y'$ et $y=y''$, lorsque $x=x'$ et $x=x''$ fournissent des relations restantes, le cas où l'on donnerait $2n$ coefficiens différentiels ou plus n'a pas encore été traité.

2.° Supposons qu'on ne donne que les deux limites x', x'', y', y'', sans assigner, pour ces limites, les valeurs de p', p'', q', q'', ... Il faudra toujours, dans le développement de $\delta\int V\mathrm{d}x$, égaler séparément à zéro la partie contenue sous le signe $\int$ et la partie en avant de ce signe. En effet, supposons que nous ayons trouvé la courbe qui satisfait au *maximum* ou au *minimum*, entre les deux points donnés, et prenons, pour les points limites, les valeurs de p', p'', q', q''; ......; cherchons ensuite la courbe qui satisfait au *maximum* ou au *minimum*, pour ces valeurs fixes de p, q, ...; il est manifeste que nous devrons retomber de nouveau sur la courbe dont il s'agit; or, en fixant p', p'', q', q'', ... tout aussi bien que x', x'', y', y'', il faut, comme nous l'avons vu ci-dessus, que l'on ait l'équation (A); donc, cette équation devra encore avoir lieu, lorsqu'on ne fixera pas p', p'', q', q'', ... (*). Comme ces quantités sont indépendantes entre elles, pour que la première partie de $\delta\int V\mathrm{d}x$ soit nulle, il faudra égaler séparément à zéro les coefficiens

$$Q'-\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}+\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'^2}-\ldots \text{ de } \delta p', \qquad Q''-\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}x''}+\frac{\mathrm{d}^2S''}{\mathrm{d}x''^2}-\ldots \text{ de } \delta p'',$$

$$R'-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}+\ldots\ldots\ldots \text{ de } \delta q', \qquad R''-\frac{\mathrm{d}S''}{\mathrm{d}x''}+\ldots\ldots\ldots \text{ de } \delta q'',$$

$$S'-\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ de } \delta r', \qquad S''-\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ de } \delta r'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

(*) M. Ampère est ici le premier qui ait expliqué nettement pourquoi, dans tous les cas, la quantité sous le signe $\int$ que contient l'équation commune au *maximum* et au *minimum* doit être séparément nulle. C'est le seul point sur lequel notre mémoire du tom. XIII, déjà cité, nous avait semblé vulnérable.

J. D. G.

Les équations résultantes ne seront qu'au nombre de $2n-2$, parce que le δ du dernier coefficient différentiel manque dans la première partie de $\delta\int V\mathrm{d}x$, comme le fait voir bien évidemment la forme des coefficiens de δp, δq, ... Par exemple, s'il n'y a que cinq coefficiens différentiels p, q, r, s, t, la première partie de $\delta\int V\mathrm{d}x$, finira par $T\delta s$, et ne contiendra point δt. Mais il faut qu'aux deux limites l'intégrale de l'équation donne pour $x=x'$ ou x'', $y=y'$ ou y''. Cela fournira deux nouvelles relations qui, jointes aux $2n-2$ dont il vient d'être question, compléteront le nombre total de celles qui seront nécessaires pour la détermination des $2n$ constantes arbitraires introduites par l'intégration de (A).

Il est presque superflu d'observer que, si quelques-unes seulement des quantités p', p'', q', q'', étaient données, il n'y aurait à égaler à zéro que les coefficiens des $\delta p'$, $\delta p''$, $\delta q'$, $\delta q''$, ... non donnés. Les autres relations nécessaires pour déterminer les $2n$ constantes arbitraires de l'intégrale de (A), seraient fournies par celles des quantités p', p'', q', q'', ... dont les valeurs seraient connues.

Nous remettons à traiter plus tard du cas où les limites ne seraient pas invariablement fixées, mais assujetties seulement à la condition de se trouver sur deux lieux géométriques donnés; et nous nous occuperons, pour le présent, des cas où l'équation (A) est susceptible de quelques simplifications.

§. IV. *Simplifications du procédé général.*

Il est de cas où l'équation

$$N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}+\dots\dots=0 \qquad \text{(A)}$$

peut être simplifiée.

1.° Quand V ne contient pas y, on a $N=0$, et par suite

$$\frac{dP}{dx}-\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^3R}{dx^3}-\dots\dots=0\ ;$$

ce qui donne, en multipliant par dx et intégrant,

$$P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\dots\dots=C\ ; \qquad \text{(C)}$$

équation de l'ordre $2n-1$. Si en outre p manquait dans V, l'équation pourrait, par un procédé analogue, être amenée à l'ordre $2n-2$, et ainsi de suite.

2.° Quand V ne contient pas x, et que l'on a conséquemment

$$V=\mathrm{f}(y\,,\,p\,,\,q\,,\,\dots\dots)\,,$$

et par suite

$$\left[\frac{dV}{dx}\right]=Np+Pq+Qr+\dots\dots\,.$$

Si nous substituons ici la valeur de N tirée de l'équation (A), qui est

$$N=\frac{dP}{dx}-\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^3R}{dx^3}-\dots\dots,$$

nous aurons

$$\frac{dV}{dx}=Pq+Qr+Rs+\dots\dots+p\frac{dP}{dx}-p\frac{d^2Q}{dx^2}+p\frac{d^3R}{dx^3}-\dots\dots\dots\ ;$$

multipliant par dx, et observant que

$$q\mathrm{d}x=\mathrm{d}p\,,\qquad r\mathrm{d}x=\mathrm{d}q\,,\qquad s\mathrm{d}x=\mathrm{d}r\,,\ \dots\dots,$$

il viendra

$$\frac{dV}{dx}dx = Pdp + Qdq + Bdr + \ldots\ldots + p\,\frac{dP}{dx}\,dx - p\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,dx + p\,\frac{d^3R}{dx^3}\,dx - \ldots\ldots$$

et par conséquent

$$V = \int Pdp + \int Qdq + \int Rdr + \ldots\ldots + \int p\,\frac{dP}{dx}\,dx - \int p\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,dx + \int p\,\frac{d^3R}{dx^3}\,dx - \ldots\ldots$$

Or, en intégrant par parties, on trouve

$$\int Pdp = Pp - \int p\,\frac{dP}{dx}\,dx\ ,$$

$$\int Qdq = Qq - p\,\frac{dQ}{dx} + \int p\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,dx\ ,$$

$$\int Rdr = Rr - q\,\frac{dR}{dx} + p\,\frac{d^2R}{dx^2} - \int p\,\frac{d^3R}{dx^3}\,dx\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

ce qui donne, en subtituant,

$$V = p\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right) + q\left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right) + r\left(R - \ldots\right) + \ldots + C ; \quad \text{(D)}$$

qui n'est plus que de l'ordre $2n-1$.

3.° Quand V ne contient ni x ni y, on peut abaisser l'équation (A), qu'on appelle quelquefois l'équation *indéfinie*, parce que son intégrale donne l'équation du *maximum* ou du *minimum*, avec des constantes arbitraires. On a alors, à la fois,

$$M = 0\ , \qquad N = 0\ ,$$

et

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} Pq+Qr+Rs+\ldots\ldots ;$$

l'équation indéfinie se réduit donc à,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}-\ldots\ldots=0 ,$$

et donne, en intégrant

$$P=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\ldots\ldots+C ;$$

puis, en substituant

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=Qr+Rs+\ldots\ldots+q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-q\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\ldots\ldots+Cq ;$$

et ensuite, en multipliant par $\mathrm{d}x$ et intégrant,

$$V=\int Q\mathrm{d}q+\int R\mathrm{d}r+\ldots\ldots+\int q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\int q\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x+\ldots\ldots+Cp+C' ;$$

mais, nous avons trouvé ci-dessus, en intégrant par parties,

$$\int Q\mathrm{d}q=Qq-p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\int p\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x ,$$

$$\int R\mathrm{d}r=Rr-q\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+p\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-\int p\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}x ,$$

. . . . ;

il viendra donc, en substituant,

$$V=q\left(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}-\ldots\right)+r\left(R-\frac{dS}{dx}+\ldots\right)+s\left(S-\ldots\right)+\ldots+Cp+C' ; \quad \text{(E)}$$

équation qui ne s'élève qu'à l'ordre $n-2$ seulement, et qu'on pourrait abaisser encore si p était nul.

§. V. *Applications diverses.*

Soit proposé d'assigner la courbe, joignant deux points donnés, dont la révolution autour de l'axe des x engendre une surface *minimum* ?

La surface de révolution considérée comme indéfinie, étant exprimée par $2\varpi\int y dx\sqrt{1+p^2}$, il faudra qu'on ait

$$\delta\int y dx\sqrt{1+p^2}=0 ;$$

on a donc ici

$$V=y\sqrt{1+p^2} ,$$

$$M=\frac{dV}{dx}=0 ,$$

$$N=\frac{dV}{dy}=\sqrt{1+p^2} ,$$

$$P=\frac{dV}{dp}=\frac{py}{\sqrt{1+p^2}} ,$$

et les quantités Q, R, S, ... sont toutes nulles. Puis donc que x n'entre pas dans V, on peut faire usage de l'équation (D), qui est simplement ici

$$V=pP+C\ ,$$

et qui devient, par les substitutions,

$$y\sqrt{1+p^2}=\frac{p^2y}{\sqrt{1+p^2}}+C\ ,$$

ou encore

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}}=c\ ,$$

d'où on tire

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{c}{\sqrt{y^2-c^2}}\ ,$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{d}x}{c}=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-c^2}}\ ;$$

ce qui donne, en intégrant

$$\frac{x}{c}=\text{Log.}(y+\sqrt{y^2-c^2})+c'\ .$$

Il resterait à déterminer c et c' par la condition que la courbe passe par les deux points donnés ; mais leur détermination ne peut avoir lieu, parce qu'elle entraînerait la résolution d'une équation exponentielle.

Toutefois, on peut reconnaître quelle est la nature de cette courbe. En effet, il est visible que y ne saurait être moindre que c ; de manière que c est l'ordonnée *minimum*. Si donc nous prenons cette ordonnée pour axe des y, il faudra qu'en posant $x=0$, on trouve $y=c$, d'où $c'=-\text{Log.}c$; donc

$$\text{Log.}\,\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}=\frac{x}{c}\,,$$

donc aussi

$$\text{Log.}\,\frac{c}{y+\sqrt{y^2-c^2}}\quad\text{ou}\quad\text{Log.}\,\frac{y-\sqrt{y^2-c^2}}{c}=-\frac{x}{c}\,:$$

cela donne

$$y+\sqrt{y^2-c^2}=ce^{+\frac{x}{c}}\,,$$

$$y-\sqrt{y^2-c^2}=ce^{-\frac{x}{c}}\,;$$

d'où en ajoutant,

$$2y=c\left(e^{+\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)\,;$$

équation que l'on reconnaît pour celle d'une chainette dont l'axe principal est celui autour duquel la révolution s'exécute (*).

Soit proposé, en second lieu, de trouver la courbe pour laquelle l'aire comprise entre un arc, les deux normales extrêmes et l'arc correspondant de la développée soit un *maximum* ?

Soit u l'aire dont il s'agit, et r le rayon de courbure; on aura

$$\mathrm{d}u=\tfrac{1}{2}r\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{2q}=\frac{(1+p^2)^2\mathrm{d}x}{2q}\,,$$

d'où

(*) Voyez *Annales*, tom. I, pag. 58. J. D. G.

$$u=\int\frac{(1+p^2)^2dx}{2q};$$

de sorte qu'il faudra poser

$$\delta\int\frac{(1+p^2)^2dx}{2q}=0,$$

on aura donc ici

$$V=\frac{(1+p^2)^2}{2q},$$

$$M=\frac{dV}{dx}=0,$$

$$N=\frac{dV}{dy}=0,$$

$$P=\frac{dV}{dp}=\frac{2p(1+p^2)}{q},$$

$$Q=-\frac{(1+p^2)^2}{2q^2},$$

R, S, ... seront nuls ; et comme ni x ni y n'entrent dans V, nous pourrons faire usage de l'équation (E) qui se réduira à

$$V=qQ+Cp+C',$$

et deviendra, par les substitutions,

$$\frac{(1+p^2)^2}{q}=Cp+C'.$$

Il faudra intégrer cette dernière équation, et déterminer les quatre

constantes arbitraires, en exprimant que la courbe passe par les deux points limites, et qu'en ces deux points Q' et Q'' sont nuls.

Mais si l'on veut seulement savoir quelle est la nature de la courbe, on remarquera que, r désignant toujours le rayon de courbure, son équation différentielle revient à

$$r\sqrt{1+p^2}=Cp+C',$$

ce qui donne successivement

$$r=\frac{Cp+C'}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$dr=\frac{(C-C'p)dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$rdr=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\cdot\frac{(C-C'p)dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(C-C'p)dp}{q}=(C-C'p)dx;$$

c'est-à-dire,

$$rdr=Cdx-C'dy$$

d'où, en intégrant et transformant les constantes,

$$r^2=Cx+C'y+C''. \qquad (1)$$

On peut faire disparaître ces constantes, en choisissant les axes d'une manière convenable. On peut d'abord porter l'origine au point pour lequel le rayon de courbure est nul. En désignant alors par α, β les coordonnées de ce point, on aura

$$C\alpha+C'\beta+C''=0. \qquad (2)$$

Nous pourrons ensuite faire tourner le système des axes autour

de la nouvelle origine (α, β). Les formules générales de cette transformation étant, comme l'on sait

$$x=\alpha+t\text{Cos}.m-u\text{Sin}\,m\ ,\qquad y=\beta+t\text{Sin}.m+u\text{Cos}.m$$

on trouvera, en substituant dans (1) et ayant égard à la relation (2)

$$r^2=t(C\text{Cos}.m+C'\text{Sin}.m)+u(C'\text{Cos}.m-C\text{Sin}.m)\ .$$

L'angle m étant arbitraire, on pourra en disposer de manière que

$$C\text{Cos}.m+C'\text{Sin}.m=0\ ,$$

il en résultera

$$\text{Cos}.m=\frac{C'}{\sqrt{C^2+C'^2}}\ ,\qquad \text{Sin}.m=-\frac{C}{\sqrt{C^2+C'^2}}\ ;$$

on aura conséquemment

$$r^2=u(C'\text{Cos}.m-C\text{Sin}.m)=u\frac{C^2+C'^2}{\sqrt{C^2+C'^2}}=u\sqrt{C^2+C'^2}\ ;$$

ou, en transformant les constantes

$$r^2=4au\ ;$$

Soient faits

$$\frac{du}{dt}=p_1\ ,\qquad \frac{d^2u}{dt^2}=\frac{dp_1}{dt}=q_1\ ,\quad \text{d'où}\ r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q_1}\ ;$$

il en résultera

$$\frac{\frac{dp_1}{dt}}{(1+p_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{u}}\ ,\qquad \text{et}\qquad \frac{2p_1dp_1}{(1+p_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{p_1dt}{\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}}\ ;$$

d'où, en intégrant,

$$-\frac{1}{\sqrt{1+p_1^2}}=\mp\sqrt{\frac{u}{a}}\ ,\quad 1+p_1^2=\frac{a}{u}\ ,\quad p_1=\frac{du}{dt}=\pm\sqrt{\frac{a}{u}-1}\ ;$$

équation qui appartient à une cycloïde engendrée par un cercle dont le diamètre est égal à a.

Souvent la courbe qui doit donner le *maximum* ou le *minimum* est assujettie à certaines conditions de constance, comme d'être d'une longueur donnée, de produire une aire de révolution de grandeur donnée, etc. On exprime ces conditions en écrivant que les variations des expressions des fonctions qui doivent demeurer constantes sont nulles. Ainsi, soient les conditions

$$\int V'\mathrm{d}x=l'\ ,\qquad \int V''\mathrm{d}x=l''\ ,\qquad \int V'''\mathrm{d}x=l'''\ ,\ .....$$

en nombre quelconque, on écrira

$$\delta\int V'\mathrm{d}x=0\ ,\qquad \delta\int V''\mathrm{d}x=0\ ,\qquad \delta\int V'''\mathrm{d}x=0\ ,\ ....$$

Soit, du reste,

$$\delta\int V\mathrm{d}x=0$$

la condition du *maximum* ou du *minimum*.

Il est clair que, si une fonction a un *maximum* ou un *minimum*, elle en aura encore un si on lui ajoute des quantités constantes; puis donc que $\int V'\mathrm{d}x$, $\int V''\mathrm{d}x$, $\int V'''\mathrm{d}x$, ... sont constantes, il en sera de même de $c'\int V'\mathrm{d}x$, $c''\int V''\mathrm{d}x$, $c'''\int V'''\mathrm{d}x$, ..., c', c'', c''', ... représentant des constantes indéterminées; donc on devra avoir

$$\delta\left(\int V\mathrm{d}x+c'\int V'\mathrm{d}x+c''\int V''\mathrm{d}x+...\right)=\delta\int(V+c'V'+c''V''+...)\mathrm{d}x=0\ .$$

Nous pourrons traiter $\delta\int(V+c'V'+c''V''+ ....)\mathrm{d}x$, comme nous avons traité $\delta\int V\mathrm{d}x$, dans ce qui précède, et nous trouverons ainsi le *maximum* ou le *minimum* cherché, avec les conditions auxquelles il doit satisfaire. Mais, une fois parvenus à l'équation indéfinie, il

faudra la déterminer de manière à satisfaire non seulement aux conditions que nous avons indiquées, en traitant du *maximum* et du *minimum* de $\int V\mathrm{d}x$, mais encore aux conditions $\int V'\mathrm{d}x=l'$, $\int V''\mathrm{d}x=l''$, ... ; et c'est à quoi serviront les constantes c', c'', c''', ... Il était nécessaire de les introduire, pour n'avoir pas moins de quantités à déterminer que de conditions à remplir. Du reste, nous aurons ici autant de conditions qu'il en faudra pour en assigner les valeurs.

Soit, par exemple, à trouver, parmi toutes les courbes isopérimètres, celle qui a la plus grande aire.

On a, en général, pour la courbe de plus grande aire.

$$\delta\int y\mathrm{d}x=0 .$$

Si l est la longueur donnée, on aura, en outre

$$\int \mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}=l ;$$

nous poserons donc

$$\delta\int(y+c\sqrt{1+p^2})\mathrm{d}x=0 ;$$

nous aurons ainsi

$$V=y+c\sqrt{1+p^2} ,$$

$$M=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0 ,$$

$$N=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}=1 ,$$

$$P=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}=\frac{cp}{\sqrt{1+p^2}} ;$$

et tous les coefficiens ultérieurs seront nuls. L'équation (D) qui est celle qui convient au cas actuel, et qui se réduit à

$$V=pP+C ,$$

deviendra, en substituant

$$y+c\sqrt{1+p^2}=\frac{cp^2}{\sqrt{1+p^2}}+C\ ;$$

ou bien

$$y+\frac{c}{\sqrt{1+p^2}}=C\ , \quad \text{d'où} \quad p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{c^2-(y-C)^2}}{y-C}\ ;$$

et, par suite

$$\frac{(y-C)dy}{\sqrt{c^2-y(y-C)^2}}=dx\ ;$$

ce qui donne, en intégrant

$$\sqrt{c^2-(y-C)^2}=-x+C'\ ,$$

c'est-à-dire,

$$(y-C)^2+(x-C')^2=c^2\ ;$$

équation du cercle. Il restera à déterminer les constantes c, C, C', par les conditions que l'arc se termine à deux points donnés, et que sa longueur entre ces deux points soit égale à l.

Il est à remarquer qu'ayant dû poser ici

$$\delta\int y\,dx=0\ ; \qquad \delta\int dx\sqrt{1+p^2}=0\ ;$$

ce sont aussi les mêmes équations que nous aurions posées s'il avait été question d'assigner, parmi les arcs de courbes qui comprennent une aire donnée, celui de moindre longueur; de sorte que le cercle doit résoudre, à la fois, les deux problèmes. Il est clair, en effet, que si, à longueur égale, le cercle embrasse la plus grande aire, il s'ensuit qu'il contient le plus de surface sous le moindre développement possible; et, par suite, à aire égale, il aura la moindre longueur.

Proposons-nous encore d'assigner, parmi les courbes isopérimètres, celle qui engendre l'aire de révolution *minimum* ?

Nous aurons ici l'équation

$$\delta\int(y+c)\sqrt{1+p^2}.dx=0\ .$$

En faisant

$$y+c=y', \quad \text{d'où } \frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx}, \quad \text{ou } p=p',$$

notre équation deviendra

$$\delta\int y'\sqrt{1+p'^2}.dx=0;$$

équation que nous avons déjà traitée ci-dessus, et qui nous a conduit à l'équation de la chainette ; c'est donc encore cette courbe qui résout ce dernier problème. Il arrive seulement ici que son axe principal se trouve à la distance c de l'axe de révolution. Du reste, la constante c, ainsi que les autres qu'introduira l'intégration de l'équation indéfinie, provenant de $\delta\int y'\sqrt{1+p'^2}.dx=0$, se détermineront comme dans l'exemple qui précède celui-ci.

§. VI. *Application aux fonctions de trois variables.*

Si, dans l'équation

$$\delta\int V dx=0,$$

V contenait, outre x et y, une troisième variable, z liée aux deux premières par une équation de relation, on l'exprimerait au moyen de celles-ci, et on ramenerait V à ne plus contenir ainsi que x, y, p, q, ...

Qu'il soit question, par exemple, de trouver la courbe la moins longue que l'on puisse tracer sur un cylindre, entre deux points de sa surface. En prenant l'axe du cylindre pour axe des y et désignant par a son rayon, l'équation de sa surface sera

$$z=\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

On aura ensuite, pour la longueur de l'arc

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\int dx\sqrt{1+p^2+\frac{a^2}{a^2-x^2}}=\int dx\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2};$$

de sorte que la condition du *minimum* sera

$$\delta\int dx\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2}=0 .$$

On aura donc ici

$$V=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2}, \qquad P=\frac{p}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2}} .$$

Comme y manque dans V, nous pourrons prendre pour équation indéfinie l'équation (C) qui, dans le cas actuel, est simplement $P=C$; c'est-à-dire, en substituant,

$$\frac{p}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2}}=C, \qquad \text{d'où} \quad p=\frac{dy}{dx}=\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^4-x^2}} ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$y=\frac{C}{\sqrt{1-C^2}} . a\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{x}{a}\right)+C' .$$

Si l'on prend l'une des extrémités de l'arc dans le plan des yz, à une distance b de l'axe des z, on devra avoir, en même temps, $x=0$; $y=b$; en mettant donc simplement C pour $\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}$, on aura

$$y=C . \text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{x}{a}\right)+b ;$$

dans laquelle C se déterminera en fixant la situation de l'autre extrémité de l'arc demandé.

L'équation que nous venons d'obtenir est celle d'une hélice; et c'est ce qu'il était facile de prévoir à l'avance. La plus courte ligne qu'on puisse tracer sur un cylindre, entre deux points de sa surface, doit être telle, en effet, qu'elle demeure encore la plus courte, en développant la surface de ce cylindre sur un plan; il faut donc que, par l'effet du développement de cette surface, elle devienne une ligne droite, ce qui est la propriété caractéristique de l'hélice.

§. VII. *Examen du cas des limites variables.*

Nous avons vu, dans ce qui précède, comment, quand on fixe les deux limites entre lesquelles le *maximum* ou le *minimum* doit avoir lieu, on peut déterminer les $2n$ constantes qu'introduit, en général, l'intégration de l'équation indéfinie

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\ldots\ldots$$

On pourrait ne pas donner proprement les deux limites, mais seulement les assujettir à la condition de se trouver sur deux courbes données. Il y aura alors $2n+4$ inconnues à déterminer, savoir, les $2n$ constantes c, c', c'', ..., introduites par l'intégration de l'équation indéfinie, et les quatre coordonnées x', y', x'', y'', des deux extrémités de la courbe cherchée. Or ici les $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$ ne sont plus nulles ; mais, puisquelles ont lieu le long des courbes données, ce sont les différentielles des coordonnées de ces courbes. En prenant donc les différentielles de leurs équations, nous pourrons exprimer $\delta y'$ et $\delta y''$, respectivement, en fonction de $\delta x'$ et $\delta x''$. En faisant la substitution de leurs valeurs dans la première partie du développement de $\delta\int V\mathrm{d}x$, il s'y trouvera $2n$ variations $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta p'$, $\delta p''$, ..., dont nous pourrons séparément égaler les coefficiens à zéro. Ensuite, x', y', x'', y'', devront satisfaire aux deux courbes données, ce qui fournira deux relations ; ils devront enfin satisfaire à la courbe trouvée, ce qui en fournira deux autres ; de sorte qu'on aura en tout $2n+4$ conditions pour déterminer les $2n+4$ inconnues.

Supposons, par exemple, que l'on demande une courbe, qui se terminant à deux hyperboles équilatères

$$y'=\frac{a^2}{x'}\;;\qquad y''=-\frac{b^2}{x''}\,,$$

produise une aire de révolution *maximum* autour de l'axe des x. On posera toujours

$$\delta\int y\,\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}=0\ ;$$

ce qui donnera, en opérant comme ci-dessus,

$$y=\frac{1}{2c'}\left(e^{+\frac{x}{c}}+c'^2e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Pour déterminer les deux constantes c, c', ainsi que les points extrêmes de la courbe, c'est-à-dire, pour déterminer les six inconnues c, c', x', y', x'', y'', nous écrirons les premiers termes du développement de $\delta\int y\,\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}$, qui sont ici

$$\frac{y'}{\sqrt{1+p'^2}}\delta x'+\frac{p'y'}{\sqrt{1+p'^2}}\delta y'$$
$$-\frac{y''}{\sqrt{1+p''^2}}\delta x''-\frac{p''y''}{\sqrt{1+p''^2}}\delta y''.$$

Or, la différentiation des équations des deux hyperboles donne

$$\delta y'=-\frac{a^2}{x'^2}\delta x'\ ,\qquad \delta y''=+\frac{b^2}{x''^2}\delta x''\ ,$$

en substituant donc, il viendra

$$\frac{y'}{\sqrt{1+p'^2}}\left(1-\frac{a^2p'}{x'^2}\right)\delta x'-\frac{y''}{\sqrt{1+p''^2}}\left(1+\frac{b^2p''}{x''^2}\right)\delta x''.$$

Il faudra donc poser

$$1-\frac{a^2p'}{x'^2}=0\ ,\qquad 1+\frac{b^2p''}{x''^2}=0\ ;$$

et comme d'ailleurs

$$-\frac{a^2}{x'^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\ ,\qquad \frac{b^2}{x''^2}=\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x''}\ ;$$

cela reviendra à

$$1+p'\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}=0\ ,\qquad 1+p''\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x''}=0\ ;$$

équations qui expriment qu'aux points limites la chainette génératrice doit être normale aux deux hyperboles données.

En remplaçant, dans ces équations p' et p'', par leurs valeurs, déduites de l'équation de la chainette; savoir

$$p'=\frac{1}{2cc'}\left(e^{+\frac{x'}{c}}-c^2e^{-\frac{x'}{c}}\right), \quad p''=\frac{1}{2cc'}\left(e^{+\frac{x''}{c}}-c^2e^{-\frac{x''}{c}}\right),$$

elles deviennent

$$2cc'x'^2-a^2\left(e^{+\frac{x'}{c}}-c^2e^{-\frac{x'}{c}}\right)=0, \quad 2cc'x''^2+b^2\left(e^{+\frac{x''}{c}}-c^2e^{-\frac{x''}{c}}\right)=0.$$

On a d'ailleurs

$$y'=+\frac{a^2}{x'}, \quad y''=-\frac{b^2}{x''},$$

$$y'=\frac{1}{2c'}\left(e^{+\frac{x'}{c}}+c^2e^{-\frac{x'}{c}}\right), \quad y''=\frac{1}{2c'}\left(e^{+\frac{x''}{c}}+c^2e^{-\frac{x''}{c}}\right);$$

on se trouve donc avoir six équations, pour déterminer c, c', x', y', x'', y''.

Si la courbe qui doit satisfaire au *maximum* ou au *minimum* était assujettie à des conditions de constance, comme d'avoir une aire, une longueur, etc., déterminée, il serait facile d'opérer comme il a déjà été dit.

Si cependant ces conditions, au lieu d'être exprimées par des intégrales, l'étaient par des équations algébriques; si, par exemple, au lieu de donner $\int V dx = l$, on donnait $\varphi(x', y', x'', y'', l)=0$; on remplacerait d'abord y' et y'' par leurs valeurs en x' et x'', ce qui donnerait $\psi(x', x'', l)=0$, d'où $\delta x''=\delta x'\Phi(x', l)$. Remplaçant donc $\delta x''$ par cette valeur, on n'aurait plus que le coefficient de $\delta x'$ à égaler à zéro, ce qui ne laisserait plus que $2n+3$ relations; mais celle qui aurait disparu se trouverait alors suppléée par l'équation donnée $\varphi(x', y', x'', y'', l)=0$. C'est ainsi, par

exemple, qu'on en agirait, si la chainette qui doit se terminer aux deux hyperboles était assujettie à avoir une corde d'une longueur donnée. L'équation de condition serait ainsi $(x'-x'')^2+(y'-y'')^2=l^2$.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Méthode graphique pour les tangentes à la spirale conique;

Par M. H. Garbinski, Professeur à l'Université royale de Varsovie.



Si, tandis que la génératrice d'un cône droit se meut uniformément sur la surface convexe de ce cône, un point parti du sommet parcourt uniformément cette génératrice mobile; ce point décrira, sur le cône, une courbe à double courbure, que nous appellerons *spirale conique*. Le but que nous nous proposons ici est de découvrir une méthode graphique pour mener une tangente à cette courbe, en l'un quelconque de ses points.

Supposons, pour fixer les idées, que l'axe du cône soit vertical, et coupons-le par un plan horizontal quelconque, la projection de la génératrice mobile sera une droite tournant uniformément sur ce plan, autour de l'un de ses points, projection du sommet du cône; et la projection du point générateur sera un point parcourant uniformément cette droite, à partir du point fixe sur lequel elle tourne; c'est-à-dire, que la projection du point générateur de la spirale conique décrira une *spirale d'Archimède*, laquelle sera ainsi la projection horizontale de cette courbe à double courbure.

Soit, en second lieu, un cylindre droit de même axe que notre cône, et d'un rayon quelconque. Si l'on projette la génératrice

mobile de ce cône sur la surface convexe du cylindre, par un plan passant par l'axe commun, sa projection sera une génératrice mobile de ce cylindre, parcourant uniformément sa surface convexe. Si de plus on projétte le point générateur de la spirale conique sur ce même cylindre, par une perpendiculaire à l'axe commun, sa projection sera un point décrivant uniformément la génératrice mobile du cylindre; c'est-à-dire, que la projection du point générateur de la spirale conique sur le cylindre, faite comme il vient d'être dit, décrira sur ce cylindre la courbe à double courbure connue sous le nom d'*hélice*.

Il suit de là que le lieu des perpendiculaires abaissées sur l'axe du cône, de tous les points de la spirale conique, est la surface gauche connue sous le nom d'*hélicoïde*; surface dont la génératrice sera constamment horizontale, et aura pour directrices de son mouvement, d'une part l'axe commun du cône et du cylindre, et de l'autre, indistinctement, la spirale conique ou l'hélice tracée sur le cylindre.

La spirale conique se trouvant donc ainsi l'intersection du cône et d'une hélicoïde, il s'ensuit que si, par un quelconque des points de cette courbe, on mène deux plans tangens l'un au cône et l'autre à l'hélicoïde, l'intersection de ces deux plans sera la tangente à la courbe en ce point.

Ces préliminaires ainsi entendus, convenons, à l'exemple de M. Vallé, et pour abréger le discours, que généralement le symbole (P, Q) représentera le point ou la ligne dont les projections horizontales et verticales sont respectivement P et Q. Prenons pour plan de projection horizontale le plan perpendiculaire à l'axe du cône qui contient l'extrémité de la première circonvolution de la spirale conique, et pour plan de projection vertical un plan parallèle quelconque à celui qui contient ce même point et l'axe du cône.

Soient (fig. 4) XY la commune section de ces deux plans, (C′, S″) le sommet du cône, (C′, S″C″) son axe, (A′H′B′, A″D″B″) sa sec-

tion circulaire, suivant le plan de projection horizontal, (A′C′B′, A″S″B″) sa section triangulaire parallèle au plan de projection vertical, (A′, A″) l'extrémité de la première circonvolution de la spirale conique, (C′A′, S″A″) la génératrice dans sa situation initiale, enfin (M′, M″) le point de la spirale par lequel on se propose de lui mener une tangente, et que, pour fixer les idées, nous supposons appartenir à la première circonvolution de cette courbe, (C′H′, S″D″) la génératrice passant par ce point, et (M′C′, M″G″) la perpendiculaire abaissée du même point sur l'axe du cône.

Concevons un cylindre droit, de même axe que le cône, et ayant pour rayon (C′A′, C″A″); en prolongeant (C′M′, G″M″), jusqu'à la rencontre de la surface convexe de ce cylindre en (H′, H″) ce point sera un de ceux de l'hélice et (C′H′, G″H″) une des génératrices de l'hélicoïde dont il a été question ci-dessus; et à laquelle il faudra mener un plan tangent par le point (M′, M″).

Si, par le point (H′, H″) on conçoit une tangente à l'hélice, la projection horizontale H′P′ de cette tangente sera une tangente en H′ au cercle A′H′B′, et elle percera le plan horizontal en un point P′ de cette droite telle que la longueur H′P′ sera égale à celle de l'arc H′A′.

Soit une droite mobile constamment horizontale et s'appuyant continuellement dans son mouvement, d'une part sur l'axe commun du cône et du cylindre, et d'une autre sur la tangente en (H′, H″) à l'hélice; cette droite, dans son mouvement, engendrera un paraboloïde hyperbolique, tangent suivant (C′H′, G″H″) à l'hélicoïde; et ces deux surfaces auront en (M′, M″) le même plan tangent; de sorte que notre problème se réduit à déterminer, pour ce même point, le plan tangent au paraboloïde hyperbolique.

On sait que le plan tangent à une telle surface, en l'un de ses points, a deux élémens rectilignes communs avec elle; puis donc que (C′H′, C″H″) est un de ces élèmens, il n'est plus question que de trouver l'autre qui doit, comme celui-là, passer par le point (M′, M″).

On sait aussi qu'un même le paraboloïde hyperbolique peut être engendré de deux manières, par le mouvement d'une droite qui s'appuye continuellement sur deux autres, en restant constamment parallèle à un plan fixe, et qu'on déduit le deuxième mode de génération du premier, en prenant pour directrices deux situations quelconques de la génératrice, et pour plan directeur un plan parallèle à la fois aux deux directrices primitives.

Le point C′ étant un des points de l'axe commun du cône et du cylindre, et le point P′ un des points de la tangente à l'hélice en (H′, H″), et la droite C′P′ étant d'ailleurs horizontale, il s'ensuit que cette droite représente une des situations de la génératrice, dans le mode primitif de génération; et, comme (C′H′, G″H″) en représente une autre, il s'ensuit que ces deux droites peuvent être prises pour directrices de seconde génération du paraboloïde. Il faudra prendre alors pour plan directeur un quelconque des plans parallèles à la fois à l'axe du cône et à la tangente à l'hélice en (H′, H″), qui sont les deux directrices de première génération; et, comme la première de ces deux directrices est verticale, ce plan le sera également.

Faisons passer le plan directeur par le point (M′, M″), sa trace sur le plan horizontal passera par M′ et sera parallèle à H′P′. Soit Q′ le point où cette trace rencontre C′P′, alors la droite menée du point Q′ au point (M′, M″), s'appuyant sur les deux directrices de seconde génération, et se trouvant en outre dans le plan directeur, appartiendra au paraboloïde; et, comme la droite (C′H′, G″H″) lui appartient également, il s'ensuit que le plan conduit par ces deux droites sera le plan tangent en (M′, M″) au paraboloïde et conséquemment à l'hélicoïde; et devra conséquemment contenir la tangente en (M′, M″) à la spirale conique.

Ce plan passant par l'horizontale (C′H′, G″H″) et par le point Q′, sa trace sur le plan horizontal devra être une parallèle conduite par Q′ à C′H′, et coupant H′P′ en quelque point R′. Puis donc que le point R′ se trouve ainsi appartenir au plan tangent

par (M', M'') à l'hélicoïde, et qu'il appartient aussi d'ailleurs, comme point de $H'P'$, au plan tangent au cône par le même point, il s'ensuit qu'il appartient à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire, à la tangente en (M', M'') à la spirale conique : la droite $M'R'$ est donc la projection horizontale de cette tangente. Cette droite $M'R'$ est donc aussi tangente en M' à la spirale d'Archimède, projection horizontale de cette spirale conique. Nous obtenons donc, chemin faisant, un procédé fort simple, pour mener une tangente à la spirale d'Archimède, en l'un quelconque de ses points.

En projetant le point R' sur le plan vertical en R'' et menant $M''R''$, cette dernière droite sera la projection verticale de la tangente à la spirale conique ; cette tangente sera donc ($M'R'$, $M''R''$).

Cette construction extrêmement simple d'ailleurs, devient malheureusement illusoire lorsqu'on veut mener la tangente par le point (A', A''), attendu qu'alors les points A', M', H', P', Q', R' se confondent, ce qui rend la direction de $M'R'$ indéterminée. Il faut donc voir comment on pourra vaincre cette difficulté.

Il est connu qu'une hélice fait en tous ses points un angle constant avec les génératrices du cylindre sur laquelle elle est tracée, et, dans le cas présent, si l'on construit un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit soit égal à la circonférence dont le rayon est $C'A'$, et dont l'autre soit égal à $S''C''$, l'angle aigu adjacent à ce dernier côté sera l'angle dont il s'agit

Cela posé, concevons un nouveau plan de projection horizontal distant du premier de la quantité $C''c''$ et coupant le plan vertical suivant xy ; il coupera le cône suivant un cercle dont le diamètre parallèle au plan vertical sera ($a'b'$, $a''b''$), et la tangente $d'a'$ à ce cercle sera la trace sur le nouveau plan de projection horizontal du plan tangent au cône au point (A', A''). Si ensuite on prolonge $C'A'$ d'une quantité $A'S$ égale à $C''c''$, et que, par le point S, on mène une droite faisant avec SC' un angle égal à l'angle constant que fait l'hélice avec les génératrices du cylindre, et coupant $A'A''$ en T ; cette droite ST sera évidemment le ra-

battement, sur le nouveau plan de projection horizontal, de la tangente à l'hélice en (A′, A″); d'où il suit que son point T d'intersection avec la projection horizontale A′A″ de cette même tangente sera le point où la tangente perce ce même plan; donc la parallèle TU menée à C′A′ par le point T, et coupant *a′a″* en U sera la trace, sur le nouveau plan horizontal, du plan tangent à l'hélicoïde en (A′, A″); le point U appartiendra donc à la fois au plan tangent à l'hélicoïde et au plan tangent au cône par le point (A′, A″); il appartiendra donc, à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire, à la tangente à la spirale conique au point (A′, A″); la droit menée du point U à ce dernier point sera donc la tangente demandée, dont UA′ et *a″*A″ seront ainsi les projections horizontale et verticale; UA′ sera donc, en même temps la tangente en A′ à la spirale d'Archimède.

Ce dernier procédé, qu'on pourrait aisément étendre à tout autre point de la spirale conique, offre cet avantage que C″*c″* étant arbitraire, toutes les autres lignes employées dans la construction auront telle grandeur on voudra.

Bien que nous n'ayons considéré que des point de la première circonvolution de la courbe, il n'est pas difficile de voir ce qu'il y aurait à faire pour des points de cette courbe situés au delà. On parviendra aussi très-facilement à modifier le procédé dans le cas où son application obligerait à tracer des droites d'une trop grande longueur.

La méthode de Roberval, qui s'applique fort bien à la recherche de la tangente à la spirale d'Archimède, conduirait également à la tangente à la spirale conique; mais les procédés dédnits des principes de la mécanique, quelque curieux qu'ils soient d'ailleurs, ne paraissent pas devoir dispenser des solutions purement géométriques.

Varsovie, le 5 août 1825.

ANALISE APPLIQUÉE.

Mémoire sur l'avantage du banquier au jeu de trente et quarante;

Par M. le B.on Poisson, de l'académie royale des Sciences, Conseiller au Conseil royal de l'instruction publique.

(*Lu à l'Académie des Sciences le 13 mars 1820.*)

L'évaluation des chances, dans les jeux de hasard, a été l'origine du calcul des probabilités, et l'objet des problèmes résolus d'abord par Pascal, Fermat, Huyghens et les autres géomètres qui se sont les premiers occupés de ce calcul. Ceux qui les ont suivis dans cette carrière, et particulièrement M. Laplace, ne se sont pas bornés à résoudre des problèmes de cette nature; ils ont étendu les applications de ce calcul à des questions d'un plus grand intérêt; et la théorie des probabilités est devenue une des branches les plus importantes des sciences mathématiques. Mais, parmi les nombreuses questions, d'espèces si différentes, qui dépendent de cette théorie, il en existe une qui n'a point encore fixé l'attention des géomètres, ou, du moins, je n'ai vu nulle part qu'ils se soient occupés du calcul des chances, dans le jeu connu indifféremment sous le nom de *trente et quarante* ou sous celui de *trente et un.* A la vérité, on trouve dans l'Encyclopédie, par ordre de matières, à la suite de la description de ce jeu, une évaluation numérique des chances qu'il présente,



mais, avec un peu de réflexion, on s'assure aisément de l'inexactitude du principe sur lequel ce calcul est fondé. Cependant, le *trente et un* étant le jeu auquel on expose annuellement le plus d'argent, dans les jeux publics, il serait utile de reconnaître *à priori* l'avantage des personnes auxquelles la ville de Paris concède le privilége exclusif de ces jeux. Cette question d'ailleurs, par la complication des conditions du jeu, est un des problèmes de probabilité les plus curieux qu'on puisse se proposer. La plupart de ces problèmes se résolvent, comme on sait, par des méthodes uniformes, fondées sur l'intégration des équations aux différences finies et partielles; mais, dans la question dont il s'agit ici, on ne tarde pas à reconnaître que l'usage de ces équations ne pourrait être d'aucun secours, et l'on est obligé, pour la résoudre, de recourir à de nouveaux moyens. Ceux que j'ai employés, dans ce mémoire, m'ont conduit à des formules dont le développement, suivant les puissances d'une ou de plusieurs variables, fera connaître toutes les chances du *trente et quarante* que l'on voudra déterminer; de la même manière que, dans des questions moins compliquées, le développement de la puissance d'un binome, ou d'un polynome composé de plus de deux termes, sert à trouver la probabilité des événemens composés, d'après celle des événemens simples. La conséquence principale que j'en ai déduite est qu'au jeu du *trente et quarante*, l'avantage du banquier est à très-peu près égal aux *onze millièmes* de la somme des mises, ou, autrement dit, que, dans une très-longue suite de coups, celui que l'on nomme *refait de trente et un*, et pour lequel le banquier prend la demi-somme des mises, doit revenir, à très-peu près, *vingt-deux fois* pour *un millier* de coups; la probabilité de cette proportion pouvant approcher de la certitude d'aussi près qu'on voudra, en prolongeant le jeu convenablement.

1. Le jeu de *trente et quarante* se joue avec six jeux de cartes complets, formant en tout 312 cartes. Les figures comptent pour



dix, les as pour un, et chacune des autres cartes pour le nombre de ses points. Toutes les cartes étant mêlées, on tire successivement une, deux, trois, ... cartes, jusqu'à ce que la somme des points des cartes tirées ait passé trente; et l'on s'arrête aussitôt qu'elle a dépassé cette limite. On fait ensuite un second tirage, semblable au premier, c'est-à-dire, que l'on tire de même, sur les cartes restantes, une, deux, trois, ... cartes, jusqu'à ce que la somme de leurs points ait surpassé trente. L'ensemble de ces deux tirages forme ce qu'on appelle un *coup*. Après le premier coup, on en joue un second, de la même manière, avec les cartes restantes; après celui-ci un troisième; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé la totalité des cartes que l'on avait d'abord. Quand ces 312 cartes sont tirées, ou bien, quand il n'en reste plus assez pour faire un coup complet, on a achevé ce qu'on appele une *taille*; et le jeu peut ensuite recommencer, suivant les mêmes règles, avec les mêmes ou d'autres cartes.

Puisque l'on s'arrête, dans chaque tirage, dès qu'on a dépassé trente, et puisque 10 est le plus haut point qu'une carte puisse amener, il s'ensuit que chaque tirage ne peut présenter que 10 points différens, dont le plus petit sera 31 et le plus grand 40. En ajoutant les points de toutes les cartes qui composent six jeux complets, la somme est égale à 2040. Chaque coup emploîra au plus 80 et au moins 62 de ces points; le nombre des coups qui composeront une taille entière sera donc toujours compris entre $\frac{2040}{80}$ et $\frac{2040}{62}$, ou entre 25 et 32.

Avant qu'un coup soit commencé, chaque joueur parie contre le *banquier*, pour l'un ou l'autre des deux tirages dont ce coup sera composé. Le tirage qui amène le plus petit point, ou le moins éloigné de trente, est celui qui gagne. Le banquier paye aux joueurs qui ont parié pour ce tirage une somme égale à celle qu'ils ont jouée, et il prend les mises des joueurs qui ont parié pour l'au-

tre tirage (*). Si les deux tirages amènent des points égaux, et supérieurs à 31, comme 32 et 32, 33 et 33, ... 40 et 40, le coup est nul : le banquier ne paye ni ne reçoit rien pour ces sortes de coups ; de sorte que s'il en était de même pour le coup 31 et 31, le banquier n'aurait évidemment aucun avantage, et le jeu serait parfaitement égal entre les joueurs et lui. Mais, lorsqu'il arrive ce qu'on appelle un *refait* de 31, ou autrement dit, si les deux tirages d'un même coup amènent ce nombre, le coup n'est pas réputé nul ; et le banquier prend la moitié des mises de tous les joueurs. L'avantage du banquier, au jeu de *trente et quarante*, est donc égal, pour chaque coup, à la demi-somme de toutes les mises, multipliée par la probabilité du refait de 31, relative à ce coup. Ainsi, l'objet principal de ce mémoire consiste à déterminer cette probabilité. Mais nous allons, auparavant, résoudre plusieurs problèmes de hasard qui n'avaient point encore été traités jusqu'ici, et dont cette détermination ne sera plus qu'une application particulière.

2. Une urne renferme x_1 boules portant le numéro 1, x_2 boules portant le numéro 2, x_3 boules portant le numéro 3, ..., enfin x_i boules portant le numéro i, le plus haut de tous ceux dont les boules sont marquées ; on tire successivement une, deux, trois, ... boules, sans les remettre dans l'urne, après qu'elles

(*) Communément, pour plus de commodité, les joueurs, qu'on appelle aussi les *pontes*, placent leurs mises sur le bord de deux cartons circulaires, l'un noir, répondant au premier tirage de chaque coup, et l'autre rouge, répondant au second ; et de là vient que, dans quelques localités, le *trente et quarante* est aussi appelé la *rouge et noire*, et qu'on dit parier pour la couleur noire ou pour la rouge, suivant qu'on parie pour le premier ou pour le second tirage.

J. D. G.

en sont sorties ; cette suite de tirages se continue, jusqu'à ce que la somme des numéros amenés par les boules ait atteint ou surpassé un nombre donné x : on demande la probabilité que cette somme sera égale au nombre x ?

Soit s le nombre total des boules contenues dans l'urne ; en sorte qu'on ait

$$x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_i=s.$$

Désignons par a_1, a_2, a_3, ... a_i, des nombres entiers ou nuls, respectivement moindres que x_1, x_2, x_3, ... x_i, ou qui leur soient tout au plus égaux : et faisons aussi

$$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_i=n.$$

Par les premières règles du calcul des probabilités, si l'on fait un nombre n de tirages successifs, sans remettre les boules dans l'urne, la probabilité d'amener d'abord a_1 boule n.° 1, ensuite a_2 boules n.° 2, puis a_3 boules n.° 3 ....., enfin a_i boules n.° i, sera exprimée par

$$\frac{(s-n)!}{s!}\cdot\frac{x_1!}{(x_1-a_1-1)!}\cdot\frac{x_2!}{(x_2-a_2-1)!}\cdot\frac{x_3!}{(x_3-a_3-1)!}\cdots\frac{x_i!}{(x_i-a_i-1)!};$$

en adoptant, en général, avec quelques géomètres, pour la commodité typographique, l'expression $k!$, comme le symbole de 1.2.3....k. Pour en déduire la probabilité d'amener, dans un ordre quelconque, en n tirages, a_1 boules n.° 1, a_2 boules n.° 2, a_3 boules n.° 3, ... a_i boules n.° i, il faudrait multiplier cette quantité par le nombre 1.2.3....n de permutations dont sont susceptibles les n numéros amenés, si tous ces numéros étaient différens ; mais, à cause que les numéros égaux ne doivent pas être permutés entre eux, il faudra multiplier la probabilité précédemment obtenue seulement par

$$\frac{n!}{a_1!a_2!a_3!\ldots\ldots a_i!};$$

ce qui donnera un produit qui pourra s'écrire ainsi

$$\frac{n!(s-n)!}{s!}\cdot\frac{x_1!}{a_1!(x_1-a_1-1)!}\cdot\frac{x_2!}{a_2!(x_2-a_2-1)!}\cdots\frac{x_i!}{a_i!(x_i-a_i-1)!}.$$

Or, en intégrant, depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, on a

$$\frac{n!(s-n)!}{s!}=(s+1)\int(1-y)^{s-n}y^n\,dy\,;$$

en faisant donc, pour abréger

$$\frac{x_1!y^{a_1}}{a_1!(x_1-a_1)!(1-y)^{a_1}}\cdot\frac{x_2!y^{a_2}}{a_2!(x_2-a_2)!(1-y)^{a_2}}\cdots\frac{x_i!y^{a_i}}{a_i!(x_i-a_i)!(1-y)^{a_i}}=Y,$$

et observant que la somme des exposans a_1, a_2, a_3, ... a_i est égale à n, ce produit deviendra donc

$$(s+1)\int(1-y)^sY\,dy.$$

La somme des numéros amenés par cette suite de tirages sera $a_1+2a_2+3a_3+\ldots\ldots+ia$; or, d'après l'énoncé du problème, cette somme doit être égale à x; la probabilité demandée par cet énoncé sera donc égale à la somme des valeurs que l'on déduira de l'expression $(s+1)\int(1-y)^sY\,dy$, en y donnant aux nombres a_1, a_2, a_3, ... a_i, toutes les valeurs, y compris zéro, qui satisfont à l'équation

$$a_1+2a_2+3a_3+\ldots\ldots+ia_i=x.$$

Donc, si nous désignons par Y_1 la somme de toutes les valeurs de Y qui répondent à ces valeurs de $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_i$, et par X la probabilité demandée, nous aurons

$$X=(s+1)\int(1-y)^s Y_1 dy\;.$$

Maintenant, prenons une indéterminée t, et supposons qu'on fasse le produit des séries suivantes :

$$1+\frac{x_1}{1}\cdot\frac{yt}{1-y}+\frac{x_1}{1}\cdot\frac{x_1-1}{2}\cdot\frac{y^2t^2}{(1-y)^2}+\frac{x_1}{1}\cdot\frac{x_1-1}{2}\cdot\frac{x_1-2}{3}\cdot\frac{y^3t^3}{(1-y)^3}+\ldots\ldots,$$

$$1+\frac{x_2}{1}\cdot\frac{yt^2}{1-y}+\frac{x_2}{1}\cdot\frac{x_2-1}{2}\cdot\frac{y^2t^4}{(1-y)^2}+\frac{x_2}{1}\cdot\frac{x_2-1}{2}\cdot\frac{x_2-2}{3}\cdot\frac{y^3t^6}{(1-y)^3}+\ldots,$$

. . . . ,

$$1+\frac{x_i}{1}\cdot\frac{yt^i}{1-y}+\frac{x_i}{1}\cdot\frac{x_i-1}{2}\cdot\frac{y^2t^{2i}}{(1-y)^2}+\frac{x_i}{1}\cdot\frac{x_i-1}{2}\cdot\frac{x_i-2}{3}\cdot\frac{y^3t^{3i}}{(1-y)^3}+\ldots;$$

si l'on ordonne ce produit par rapport aux puissances de t, il est évident, d'après la forme de Y, que la somme Y_1 des valeurs de cette quantité ne sera autre chose que le coefficient de t^x dans la série qu'on obtiendra ; d'ailleurs, les i facteurs du produit sont les développemens des puissances

$$\left(1+\frac{yt}{1-y}\right)^{x_1},\;\left(1+\frac{yt^2}{1-y}\right)^{x_2},\;\ldots\ldots\;\left(1+\frac{yt^i}{1-y}\right)^{x_i};$$

donc, à cause de $x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_i=s$, Y_1 sera le coefficient de t^x, dans le développement du produit

$$(1-y)^s(1-y+yt)^{x_1}(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots\ldots(1-y+yt^i)^{x_i}\,.$$

et par conséquent, la probabilité X sera aussi le coefficient de t^x dans le développement de

$$(s+1)\int(1-y+yt)^{x_1}(1-y+yt^2)^{x_2}(1-y+yt^3)^{x_3}\ldots(1-y+yt^i)^{x_i}dy\,;$$

l'intégrale étant prise, comme précédemment, depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$.

3. Pour résoudre le même problème par le moyen des équations aux différences finies, j'observe que la probabilité demandée est une fonction du nombre x et des nombres x_1, x_2, x_3, ... x_i, et je la désigne par $Z_{x,\,x_1,\,x_2,\,\ldots\,x_i}$. Après le premier tirage, cette fonction deviendra l'une des quantités

$$Z_{x-1,\,x_1-1,\,x_2,\,x_3,\,\ldots\,x_i},$$
$$Z_{x-2,\,x_1,\,x_2-1,\,x_3,\,\ldots\,x_i},$$
$$Z_{x-3,\,x_1,\,x_2,\,x_3-1,\,\ldots\,x_i},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Z_{x-i,\,x_1,\,x_2,\,x_3,\,\ldots\,x_i-1},$$

suivant que la boule sortie portera quelqu'un des numéros 1, 2, 3, ... i, respectivement. Les probabilités de ces événemens sont d'ailleurs respectivement

$$\frac{x_1}{s},\ \frac{x_2}{s},\ \frac{x_3}{s},\ \ldots\ \frac{x_i}{s};$$

or, il est évident que la probabilité avant le premier tirage est

égale à la somme des probabilités qui auront lieu après, multipliées chacune par la probabilité de l'évènement auquel elle répond : c'est ce principe qui sert à mettre en équation la plupart des problèmes de probabilité ; et, dans la question présente, il en résulte que nous aurons

$$Z_{x,x_1,x_2,x_3,\ldots x_i} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{s} Z_{x-1,\, x_1-1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots x_i} \\ + \frac{x_2}{s} Z_{x-2,\, x_1,\, x_2-1,\, x_3,\, \ldots x_i} \\ + \frac{x_3}{s} Z_{x-3,\, x_1,\, x_2,\, x_3-1,\, \ldots x_i} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{x_i}{s} Z_{x-i,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\ldots x_i-1} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Le même raisonnement montre que, si l'on a $x=a$, a étant plus petit que i, on aura

$$Z_{a,\, x_1,\, x_2,\, x_3 \ldots\ldots x_i} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{s} Z_{a-1,\, x_1-1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots x_i} \\ + \frac{x_2}{s} Z_{a-2,\, x_1,\, x_2-1,\, x_3,\, \ldots\ldots x_i} \\ + \frac{x_3}{s} Z_{a-3,\, x_1,\, x_2,\, x_3-1,\, \ldots x_i} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{x_{a-1}}{s} Z_{1,\, x_1,\, x_2,\, x_3 \ldots x_{a-1}-1 \ldots x_i} \\ + \frac{x_a}{s}. \end{array} \right.$$

En comparant cette équation à la précédente, on voit que, pour qu'elle y soit comprise, et pour que l'équation (1) subsiste, pour toutes les valeurs de $x<i$, il est nécessaire de supposer la fonction Z égale à l'unité, quand $x=0$, et nulle, pour toutes les valeurs négatives de x plus petites que i, abstraction faite du signe, quelles que soient d'ailleurs les autres variables $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i$. Cela étant, en faisant successivement $x=1$, $x=2$, $x=3$, ..., dans l'équation (1), on en déduira

$$Z_{1, x_1, x_2, \ldots x_i} = \frac{x_1}{s},$$

$$Z_{2, x_1, x_2, \ldots x_i} = \frac{x_1}{s} Z_{1, x_1-1, x_2 \ldots x_i} + \frac{x_2}{s},$$

$$Z_{3, x_1, x_2, \ldots x_i} = \frac{x_1}{s} Z_{2, x_1-1, x_2 \ldots x_i} + \frac{x_2}{s} Z_{3, x_1, x_2-1, \ldots x_i} + \frac{x_3}{s},$$

. . . .

mettant aussi successivement x_1-1, x_2-1, x_3-1, ..., à la place de $x_1, x_2, x_3, \ldots$, dans la première de ces équations, on pourra ensuite éliminer les quantités

$$Z_{1, x_1-1, x_2, x_3, \ldots x_i},$$

$$Z_{1, x_1, x_2-1, x_3, \ldots x_i},$$

$$Z_{1, x_1, x_2, x_3-1, \ldots x_i},$$

. . . . ,

contenues dans les autres, et l'on aura

$$Z_{2,x_1,x_2,\ldots x_i}=\frac{x_1}{s}\cdot\frac{x_1-1}{s-1}+\frac{x_2}{s},$$

$$Z_{3,x_1,x_2,\ldots x_i}=\frac{x_1}{s}Z_{2,x_1-1,x_2,\ldots x_i}+\frac{x_2}{s}\cdot\frac{x_1}{s-1}+\frac{x_1}{s},$$

. . . . ;

et de même, au moyen de celles-ci, on obtiendrait

$$Z_{3,x_1,x_2,\ldots x_i}=\frac{x_1}{s}\cdot\frac{x_1-1}{s-1}\cdot\frac{x_1-2}{s-2}+2\frac{x_2}{s}\cdot\frac{x_1}{s-1}+\frac{x_1}{s},$$

et ainsi de suite,

De cette manière, on calculera aisément la probabilité demandée, lorsque x sera un petit nombre; mais le calcul deviendra impraticable, dès que ce nombre sera un peu considérable; et il faudra alors recourir à l'intégrale générale de l'équation (1). Cette équation linéaire a ses coefficiens variables; néanmoins, si l'on multiplie tous ses termes par s, ses coefficiens ne renfermeront les variables qu'au premier degré; circonstance d'après laquelle il sera possible d'intégrer l'équation (1) par le moyen des intégrales définies. Mais cette méthode ne conduirait que très-difficilement à la solution du problème que nous nous sommes proposé; c'est pouquoi nous nous bornerons à vérifier que la solution que nous avons trouvée satisfait à l'équation (1)

4 Soit, pour y parvenir,

$$\Sigma t^x Z_{x,x_1,x_2,x_3,\ldots x_i}=T_{x_1,x_2,x_3,\ldots x_i};$$

Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs entières et positives de x, y compris $x=0$, et jusqu'à $x=\infty$. Les valeurs

de la fonction Z qui répondent à des x négatives étant nulles, d'après ce qu'on a dit plus haut, on aura

$$\Sigma t^x Z_{x-i', x_1, x_2 \ldots x_i} = t^{i'} T_{x_1, x_2, \ldots x_i},$$

i' étant un nombre entier et positif; et, à cause que cette fonction i' est égale à l'unité quand $x=0$, le premier terme de la fonction T sera aussi égal à un. Si donc nous multiplions l'équation (1) par tx, que nous donnions ensuite à x toutes les valeurs comprises depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, et que nous fassions la somme de toutes les équations qui répondent à ces valeurs, nous aurons pour résultat

$$T_{x_1, x_2, \ldots x_i} - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{tx_1}{s} T_{x_1-1, x_2, x_3, \ldots x_i} \\ + \frac{t^2 x_2}{s} T_{x_1, x_2-1, x_3, \ldots x_i} \\ + \frac{t^3 x_3}{s} T_{x_1, x_2, x_3-1, \ldots x_i} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \quad T_{x_1, x_2, x_3 \ldots x_i-1} \end{array} \right\} (2).$$

D'ailleurs, en ayant égard à l'expression de X, trouvée à la fin du n.° 1, et qui doit aussi être la valeur de la fonction Z, on voit qu'on doit avoir

$$T_{x_1, x_2, x_3, \ldots x_i} = (s+1) \int (1-y+yt)^{x_1} (1-y+yt^2)^{x_2} \ldots (1-y+yt^i)^{x_i} dy;$$

l'intégrale étant prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$; la question consiste donc à vérifier que cette valeur de la fonction T satisfait à l'équation (2), quelle que soit la variable t.

Or, je fais

$$\frac{y}{1-y}=u, \quad \text{ou } y=\frac{u}{1+u}, \quad \text{et } dy=\frac{du}{(1+u)^2};$$

et, pour abréger,

$$(1+ut)^{x_1}.(1+ut^2)^{x_2}.(1+ut^3)^{x_3}\ldots\ldots(1+ut^i)^{x_i}=U;$$

l'équation précédente devient

$$T_{x_1,\,x_2,\,x_3,\,\ldots\ldots x_i}=(s+1)\int\frac{U du}{(1+u)^{s+2}};$$

et l'intégrale devra être prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=\infty$. En mettant successivement, dans cette équation précédente x_1-1, x_2-1, x_3-1, ... x_i-1 à la place de x_1, x_2, x_3, ... x_i, et, en même temps, $s-1$ à la place de s, on aura

$$T_{x_1-1,\,x_2,\,\ldots\ldots x_i}=s\int(1-y+yt)^{x_1-1}.(1-y+yt^2)^{x_2}..(1-y+yt^i)^{x_i}dy,$$

$$T_{x_1,\,x_2-1,\,\ldots\ldots x_i}=s\int(1-y+yt)^{x_1}.(1-y+yt^2)^{x_2-1}...(1-y+yt^i)^{x_i}dy,$$

. . . . ,

$$T_{x_1,x_2,\,..\,x_i-1}=s\int(1-y+yt)^{x_1}.(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots\ldots\ldots(1-y+yt^i)^{x_i-1}dy;$$

mais, en différentiant U par rapport à u, on a

$$\frac{dU}{du}=\left\{\begin{array}{l} tx_1(1+ut)^{x_1-1}.(1+ut^2)^{x_2}\ldots\ldots(1+ut^i)^{x_i} \\ +t^2x_2(1+ut)^{x_1}.(1+ut^2)^{x_2-1}\ldots\ldots(1+ut^i)^{x_i} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +t^ix_i(1+ut)^{x_1}.(1+ut^2)^{x_2}\ldots\ldots(1+ut^i)^{x_i-1} \end{array}\right\};$$

et, si l'on compare cette équation aux précédentes, on en conclut facilement

$$s\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}=\left\{\begin{array}{l} tx_1T_{x_1-1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_i} \\ +t^2x_2T_{x_1,\ x_2-1,\ x_3,\ \ldots\ x_i} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +t^ix_iT_{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_i-1} \end{array}\right\}.$$

Au moyen de ces résultats, l'équation (2) devient

$$(s+1)\int\frac{Udu}{(1+u)^{s+2}}-1=\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}\ ; \qquad (3)$$

mais, en intégrant par parties, il vient

$$\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}=\frac{U}{(1+u)^{s+1}}+(s+1)\int\frac{Udu}{(1+u)^{s+2}}\ ;$$

à la limite $u=0$, on a $U=1$; à la limite $u=\infty$, on a

$$\frac{U}{(1+u)^{s+1}}=0,$$

parce que U est le produit de s facteurs du premier degré par rapport à u; on aura donc

$$\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}=-1+(s+1)\int\frac{Udu}{(1+u)^{s+2}};$$

ce qui rend identique l'équation (3) qu'il s'agissait de vérifier.

5. Maintenant, proposons-nous ce second problème : les mêmes choses étant posées que dans le premier, on fait une première suite de tirages que l'on continue jusqu'à ce que la somme des numéros amenés ait atteint ou surpassé le nombre x ; ensuite, sans remettre les numéros sortis, on fait une seconde suite de tirages, que l'on prolonge jusqu'à ce que la somme des numéros amenés ait de même atteint ou surpassé un nombre aussi donné x', on demande la probabilité qu'on obtiendra, à la fois, la somme x, dans la première opération, et la somme x', dans la seconde ?

Comme dans le premier problème, la probabilité d'amener, dans la première suite de tirages et dans un ordre quelconque, a_1 boules n.° 1, a_2 boules n.° 2, a_3 boules n.° 3, ... a_i boules n.° i, sera exprimée par

$$\frac{n!(s-n)!}{s!}\cdot\frac{x_1!}{a_1!(x_1-a_1)!}\cdot\frac{x_2!}{a_2!(x_2-a_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{x_i!}{a_i!(x_i-a_i)!};$$

cet événement ayant eu lieu, la probabilité d'amener à la seconde suite de tirages, aussi dans un ordre quelconque, b_1 boules n.° 1, b_2 boules n.° 2, b_3 n.° 3, ... b_i boules n.° i, sera

$$\frac{n'!(s-n-n')!}{(s-n)!}\cdot\frac{(x_1-a_1)!}{b_1!(x_1-a_1-b_1)!}\cdot\frac{(x_2-a_2)!}{b_2!(x_2-a_2-b_2)!}\cdots\frac{(x_i-a_i)!}{b_i!(x_i-a_i-b_i)!};$$

en désignant respectivement par n et n' les nombres de numéros qui composent le premier et le second tirages, c'est-à-dire, en faisant

$$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_i=n,$$

$$b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_i=n'.$$

La probabilité de la succession de ces deux événemens l'un à l'autre sera le produit des deux probabilités qui leur correspondent, lequel produit pourra s'écrire ainsi

$$\frac{(n+n')!(s-n-n')!}{s!}\cdot\frac{n!n'!}{(n+n')!}\cdot\frac{x_1!}{a_1!b_1!(x_1-a_1-b_1)!}\cdot\frac{x_2!}{a_2!b_2!(x_2-a_2-b_2)!}\cdots\frac{x_i!}{a_i!b_i!(x_i-a_i-b_i)!};$$

or, en intégrant depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, et depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, nous avons

$$\frac{(n+n')!(s-n-n')!}{s!}(s+1)=\int(1-y)^{s-n-n'}y^{n+n'}dy,$$

$$\frac{n!n'!}{(n+n')!}=(n+n'+1)\int(1-z)^{n'}z^{n}dz;$$

de plus en faisant $\alpha=1$, après la différentiation, nous avons aussi

$$n+n'+1=\frac{d.\alpha^{n+n'+1}}{d\alpha};$$

ce qui change la dernière équation en celle-ci

$$\frac{n!n'!}{(n+n')!}=\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}\alpha}\int(1-z)^{n'}z^{n}\alpha^{n+n'+1}\mathrm{d}z\,,$$

et, au moyen de ces valeurs et de celles de n et n', le précédent produit sera égal à

$$(s+1)\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}\alpha}\iint P(1-y)^{s}\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

en faisant, pour abréger

$$X_1.X_2.X_3\ .....\ X_i=P$$

où l'on désigne par X_m, en général, le produit

$$\frac{x_m!\,y^{a_m+b_m}(1-z)^{b_m}z^{a_m}\alpha^{a_m+b_m}}{a_m!\,b!\,(x_m-a_m-b_m)!\,(1-y)^{a_m+b_m}}\,;$$

l'indice m étant un des nombres compris depuis 1 jusqu'à i.

L'énoncé du problème exige que l'on ait

$$a_1+2a_2+3a_3+\ ....\ +ia_i=x\,,$$

$$b_1+2b_2+3b_3+\ ....\ +ib_i=x'\,;$$

donc, si l'on donne aux nombres entiers positifs a_1, a_2, a_3, ... a_i, b_1, b_2, b_3, ... b_i, toutes les valeurs possibles qui satisfont à ces conditions, qu'on appelle P_1 la somme des valeurs correspondantes de P, et p la probabilité demandée par ce même énoncé, on aura

$$p=(s+1)\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}\alpha}\iint(1-y)^{s}P_1\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Mais, t et θ étant deux indéterminées différentes, on peut regarder X_m comme le coefficient du produit $t^{ma_m} . \theta^{mb_m}$, dans le développement de la puissance

$$\left\{1+\frac{y\alpha}{1-y}[zt^m+(1-z)\theta^m]\right\}^{x_m};$$

d'où l'on conclut que P_i sera le coefficient de $t^n\theta^{x'}$, dans le développement du produit

$$\left\{1+\frac{y\alpha}{1-y}[zt+(1-z)\theta]\right\}^{x_1}.\left\{1+\frac{y\alpha}{1-y}[zt^2+(1-z)\theta^2]\right\}^{x_2}....\left\{1+\frac{y\alpha}{1-y}[zt^i+(1-z)\theta^i]\right\}^{x_i},$$

ordonné suivant les puissances et produits de puissances de t et θ; donc enfin, à cause de $s=x_1+x_2+x_3+......+x_i$, la probabilité p, qu'il s'agit de déterminer sera le coefficient de $t^n\theta^{n'}$, dans le développement de cette quantité

$$(s+1)\frac{d.}{d\alpha}\iint\{1-y+y\alpha[zt+(1-z)\theta]\}^{x_1}.\{1-y+y\alpha[zt^2+(1-z)\theta^2]\}^{x_2}....$$

$$\{1-y+y\alpha[zt^i+(1-z)\theta^i]\}^{x_i}\alpha dy dz;$$

en se souvenant qu'on doit faire $\alpha=1$, après la différentiation indiquée, et prendre les intégrales depuis $y=0$ et $z=0$, jusqu'à $y=1$ et $z=1$.

Si, au lieu d'une ou de deux suites de tirages, comme dans le premier ou le second problème que nous venons de résoudre, il y en avait trois ou un plus grand nombre, l'analise précédente conduirait à la solution de la question; mais il suffit à l'objet principal de ce mémoire d'avoir considéré le cas de deux suites de tirages, qui est en effet celui que présente le *trente et quarante*, d'après les règles de ce jeu, énoncées plus haut.

6. Pour appliquer la solution du second problème au calcul des différentes chances du *trente et quarante*, il suffit de remplacer les boules numérotées que nous avons considérées par des cartes qui porteront les numéros marqués par leur nombre de points, lesquels s'étendront, par conséquent, depuis 1 jusqu'à 10; les figures comptant pour ce dernier nombre. On aura, par exemple, la probabilité du *refait* de 31, à un coup quelconque de ce qu'on appelle une taille, en faisant $x = x' = 31$, et prenant pour x_1, x_2, x_3, ... x_i, les nombres de cartes de chaque espèce qui ne sont pas sorties aux coups précédens; en sorte que cette probabilité, et l'avantage du banquier qui en dépend, varieront d'un coup à un autre d'une même taille, à raison des cartes déjà sorties. Mais il est important d'observer que, pour déterminer l'avantage du banquier, avant que le jeu commence, c'est-à-dire, la fraction de chaque mise qu'on devrait lui abandonner pour qu'il renonçât à cet avantage pendant toute la durée du jeu, il suffit de calculer la probabilité du *refait* de 31, au premier coup seulement, ou quand les six jeux de cartes avec lesquels on joue sont encore complets. En effet, lorsque ces cartes ont été mêlées, s'il existe une chance quelconque pour qu'un événement *A* arrive au premier coup et un événement *B* à un autre coup, au dixième, par exemple; il y a exactement la même chance pour que l'événement *B* arrive au premier coup et l'événement *A* au dixième; car on peut former un autre arrangement de toutes les cartes, qui ne diffère de celui que le hasard a donné qu'en ce que les cartes qui sortent au premier coup sont remplacées par celles qui sortent au dixième, et *vice versâ*; et, comme ces deux arrangemens sont également possibles, il en résulte qu'avant que le jeu commence la probabilité d'un *refait* de 31 est la même pour le premier coup, pour le dixième, ou pour tout autre coup. Elle ne varie, pendant la durée du jeu, que pour les joueurs qui ont la connaissance des cartes sorties; mais un joueur qui ne ne les connaîtrait pas devrait parier la même somme à tous les coups, pour l'arrivée d'un *refait* de 31.

Cette considération fort simple rend possible la détermination de l'avantage du banquier, en la réduisant au calcul de la seule chance qui a eu lieu au premier coup. Observons aussi qu'on pourrait déterminer cet avantage, en calculant la probabilité du *refait* de 31, à un autre coup choisi à volonté; mais il faudrait faire une hypothèse sur les cartes sorties aux coups précédens, et multiplier la probabilité qu'on trouverait par celle de cette hypothèse, ce qui rendrait le calcul extrêmement compliqué.

7. Au premier coup, que nous nous bornons à considérer, les cartes sont au nombre de 312; les neuf premiers nombres x_1, x_2, x_3, ... x_9, sont tous égaux à 24; le dixième seul x_{10} est différent, et quadruple de chacun des premiers. Ainsi, il faudra faire

$$s=312, \qquad x_1=x_2=x_3=\ldots\ldots=x_8=x_9=24, \qquad x_{10}=96.$$

Soient de plus, pour abréger,

$$1-\alpha[zt+(1-z)\theta]=z_1;$$

$$1-\alpha[zt^2+(1-z)\theta^2]=z_2;$$

$$1-\alpha[zt^3+(1-z)\theta^3]=z_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$1-\alpha[zt^{10}+(1-z)\theta^{10}]=z_{10};$$

ensuite

$$(1-yz_1)^{x_1}(1-yz_2)^{x_2}(1-yz_3)^{x_3}\ldots\ldots(1-yz_{10})^{x_{10}}=Y;$$

et, enfin,

$$U=(s+1)\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}\alpha}\iint Y\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

où l'on fera $\alpha=1$, après la différentiation, en intégrant ensuite depuis $y=0$ et $z=0$, jusqu'à $y=1$ et $z=1$. La question se réduira à calculer le coefficient de $t^{31}\theta^{31}$, dans le développement de cette quantité U, suivant les puissances et produits de puissances de t et θ. Le nombre des facteurs de Y, et la grandeur de leurs exposans, rendraient impraticable le calcul rigoureux de ce coefficient; mais on peut réduire l'intégrale $\int Y\mathrm{d}y$ en une série convergente, au moyen de laquelle on obtiendra, à tel degré d'approximation qu'on voudra, la valeur du coefficient demandé.

Pour cela, soit

$$V=-\frac{Y\mathrm{d}y}{\mathrm{d}Y}\,;$$

nous aurons

$$\int Y\mathrm{d}y=-\int V\mathrm{d}Y\,;$$

et, par une suite d'intégrations par parties, nous en conclurons

$$\int Y\mathrm{d}y=\left\{\begin{array}{l} Y_0\left[V_0+V_0\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}+V_0\frac{\mathrm{d}\left(V_0\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+V_0\frac{\mathrm{d}\left(V_0\frac{\mathrm{d}\left(V_0\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+\ldots\ldots\right] \\ -Y_1\left[V_1+V_1\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}+V_1\frac{\mathrm{d}\left(V_1\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+V_1\frac{\mathrm{d}\left(V_1\frac{\mathrm{d}\left(V_1\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+\ldots\ldots\right] \end{array}\right\};$$

les indices 0 et 1 indiquant respectivement qu'il faut faire $y=0$ et $y=1$, après différentions. Cette série est une de celles que M. Laplace a donné, pour calculer par approximation, les intégrales

des fonctions de grands nombres. Il est aisé de s'assurer que la seconde partie, qui répond à $y=1$, ne donnerait en la développant suivant les puissances et produits de puissances de t et θ, que des termes dans lesquels la somme des exposans de ces variables surpasseraient $x_1+2x_2+3x_3+\ldots\ldots+10x_{10}$; en sorte que nous devons en faire abstraction dans la question présente; donc, à cause de $Y_0=1$, nous aurons simplement

$$\int Y\,dy=V_0\left\{1+\frac{dV_0}{dy}+\frac{d\left(V_0\frac{dV_0}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(V_0\frac{d\left(V_0\frac{dV_0}{dy}\right)}{dy}\right)}{dy}+\ldots\ldots\right\}.$$

Nous aurons aussi

$$V=\frac{1}{\frac{x_1z_1}{1-yz_1}+\frac{x_2z_2}{1-yz_2}+\frac{x_3z_3}{1-yz_3}+\ldots\ldots+\frac{x_{10}z_{10}}{1-yz_{10}}};$$

Si donc nous développons le dénominateur de cette expression suivant les puissances de y, et que, m étant un nombre quelconque, nous fassions

$$x_1z_1^m+x_2z_2^m+x_3z_3^m+\ldots\ldots+x_{10}z_{10}=Z_m,$$

il en résultera

$$V=\frac{1}{Z_1+Z_2y+Z_3y^2+Z_4y^3+\ldots\ldots};$$

et, en substituant cette valeur dans celle de $\int Y dy$, on trouvera

$$\int Y dy=\frac{1}{Z_1}-\frac{Z_2}{Z_1^3}+\frac{3Z_2^2-2Z_1Z_3}{Z_1^5}-\frac{15Z_2^3-20Z_1Z_2Z_3+6Z_1^2Z_4}{Z_1^7}+\ldots\ldots$$

A cause du nombre et de la grandeur des quantités x_1, x_2, ...

x_9, ... x_{10}, qu'elles renferment, les expressions Z_1, Z_2, Z_3, ... ont de grandes valeurs, et toutes du même ordre de grandeur, d'où il résulte que cette série est très-convergente, du moins dans ses premiers termes; car les coefficiens numériques qui se trouvent à leurs numérateurs croissent indéfiniment, et finissent par rendre cette série divergente. Mais, en s'en tenant à la partie dans laquelle elle est convergente, on aura une expression très-approchée de $\int Y dy$; et, si nous nous bornons d'abord à son premier terme, nous aurons

$$U=(s+1)\frac{d.}{d\alpha}\int\frac{\alpha dZ}{Z_1},$$

pour la valeur correspondante de U.

La valeur de Z_1 est la même chose que

$$Z_1=s-\alpha T-\alpha(1-z)\Theta,$$

en faisant, pour abréger,

$$T=x_1t+x_2t^2+x_3t^3+\ldots\ldots+x_{10}t^{10},$$

$$\Theta=x_1\theta+x_2\theta^2+x_3\theta^3+\ldots\ldots+x_{10}\theta^{10},$$

Si on la substitue dans U, et que l'on y fasse $\alpha=1$, après avoir effectué la différentiation indiquée, on aura

$$U=\int\frac{(1+s)s\,dz}{[s-zT-(1-z)\Theta]^2};$$

et, en intégrant, depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, il vient

$$U=\frac{(s+1)s}{T-\Theta}\left(\frac{1}{s-T}-\frac{1}{s-\Theta}\right)=\frac{s+1}{s}\left(1-\frac{T}{s}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{\Theta}{s}\right)^{-1}.$$

Or, les deux symboles T et Θ représentant des fonctions semblables de t et θ, les coefficiens des mêmes puissances de leurs variables respectives seront les mêmes dans les développemens des deux puissances

$$\left(1-\frac{T}{s}\right)^{-r}, \quad \left(1-\frac{\Theta}{s}\right)^{-r};$$

désignant donc par k le coefficient de t^{31}, dans le premier des deux développemens, et appelant p la probabilité du refait de 31, ou le coefficient de $t^{31}\theta^{31}$, dans le développement de U, nous aurons

$$p=\frac{s+r}{s}k^2;$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'à calculer la valeur numérique de ce coefficient k.

8. Avant d'effectuer ce calcul, nous observerons que la quantité k serait la probabilité de 31 simple, et, par conséquent, k^2 celle du refait de 31., si l'on remettait les cartes dans le jeu, à mesure qu'elles sortent. En effet, dans cette hypothèse, il est aisé de voir, d'après la théorie des combinaisons, que la probabilité d'amener une somme donnée x, dans un nombre déterminé m de tirages successifs, n'est autre chose que le coefficient de t^x, dans le développement de la puissance

$$\left(\frac{x_1}{s}t+\frac{x_2}{s}t^2+\frac{x_3}{s}t^3+\ldots\ldots+\frac{x_{10}}{s}t^{10}\right)^m,$$

ou de $\frac{T^m}{s^m}$; par conséquent, la probabilité d'amener cette même somme en un nombre quelconque de tirages sera le coefficient de t^n dans le développement de la série

$$\frac{T}{s}+\frac{T^2}{s^2}+\frac{T^3}{s^3}+\frac{T^4}{s^4}+\ldots\ldots,$$

qu'on peut à volonté arrêter au x.me terme ou prolonger à l'infini ; on y peut aussi ajouter l'unité ; et alors elle devient égale à $\dfrac{1}{1-\frac{T}{s}}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de cette remarque qu'à raison du grand nombre de cartes que l'on emploie au *trente et quarante*, la probabilité du 31 au premier coup est peu différente de ce qu'elle serait, si l'on s'assujétissait à remettre les cartes dans le *talon*, à mesure qu'elles sont sorties. Ce résultat qui aurait aussi lieu au premier coup, pour toutes les autres chances du jeu, est évident en lui-même ; et on peut le considérer comme une vérification de la méthode d'approximation employée dans le numéro précédent.

9. Faisons usage présentement des valeurs numériques de s, x_1, x_2, x_3, ... x_{10}. Nous aurons

$$\frac{T}{s}=a(t+t^2+t^3+\ldots+t^9+4t^{10})=a.\frac{t-t^{11}}{1-t}+3at^{10};$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{24}{s}=\frac{24}{213}=\frac{1}{13}=a.$$

On conclut de là

$$\frac{1}{1-\frac{T}{s}}=\frac{1-t}{1-(1+a)t-a(3-4t)t^{10}};$$

Digitized by Google

et, en développant d'abord suivant les puissances de t^{10}, il vient

$$\frac{1}{1-\frac{T}{s}}$$

$$=\frac{1-t}{1-(1+a)t}+\frac{a(1-t)(3-4t)t^{10}}{[1-(1+a)t]^2}+\frac{a^2(1-t)(3-4t)^2t^{20}}{[1-(1+a)t]^3}+\frac{a^3(1-t)(3-4t)^3t^{30}}{[1-(1+a)t]^4}.$$

On rejette les termes suivans de cette série, qui contiendraient la puissance t^{40} et des puissances supérieures de t. Il est aisé de prendre le coefficient de t^{31}, dans chacun des quatre termes que l'on conserve; et, en faisant la somme de ces quatre coefficiens, on aura la valeur exacte de k; savoir :

$$k=a(1+a)^{30}+\frac{a}{1}\cdot\frac{d[(1+a)^{20}(3a-1)a]}{da}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2[(1+a)^{10}(3a-1)^2a]}{da^2}$$
$$+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3[(3a-1)^3a]}{da^3}.$$

J'effectue les différentiations indiquées; puis au moyen de $a=\frac{1}{13}$, je réduis cette formule en nombres; et, en poussant l'approximation jusqu'aux décimales du sixième ordre, je trouve

$$k=0,148062;$$

d'où il résulte

$$p=\frac{313}{312}k^2=0,021993.$$

Le calcul deviendrait très-pénible, si l'on voulait avoir égard au second terme, et aux termes suivans du développement de $\int Y dy$, que nous avons négligés. En tenant compte du second terme,

j'ai trouvé que la première valeur approchée de p doit être diminuée de 0,000026 ; les termes suivans ne changeraient pas cette valeur dans les six premières décimales ; ainsi, l'on peut prendre

$$p=0{,}021967 ,$$

pour la probabilité du refait de 31, au commencement du jeu.

D'après ce qu'on a dit plus haut, on aura l'avantage du banquier, en multipliant cette valeur de p par la demi-somme de toutes les mises ; en sorte que, pour racheter cet avantage, avant que le jeu commence, chaque joueur devrait convenir de donner au banquier, à tous les coups, y compris les coups nuls, les *onze millièmes*, à très-peu près, de l'argent qu'il voudra exposer.

10. Les problèmes des numéros 2 et 5 comprennent aussi les autres chances du *trente et quarante*. Si l'on veut, par exemple, calculer la probabilité d'amener le nombre 32, on supposera d'abord, dans le problème du numéro 2, que l'on continue la suite des tirages, jusqu'à ce qu'on ait atteint ou dépassé 32 ; ainsi, on fera la limite $x=32$, et on déterminera, par l'analise de ce numéro, la probabilité d'amener cette limite ; mais, cette probabilité ne sera pas encore celle qu'il faut connaître ; car, d'après les conditions du jeu, on doit amener le nombre 32, sans avoir passé par le nombre 31. Or, la probabilité de cet événement est évidemment égale à celle qu'on aura calculée, comme on vient de le dire, moins la probabilité d'amener d'abord 31 et ensuite 1, laquelle probabilité se calculera par l'analise du numéro 5, en prenant $x=31$ et $x'=1$. Ces calculs, déjà très-longs par rapport au nombre 32, le seraient encore bien plus pour les nombres supérieurs 33, 34, 35, ... Mais, si l'on veut connaître les probabilités d'amener ces différens nombres, seulement au premier coup, on pourra supposer qu'on remet les cartes dans le jeu, à mesure qu'elles sont sorties (n.° 8); les calculs seront alors faciles à

exécuter, et l'erreur que l'on commettra sera peu considérable, ainsi qu'on l'a vu par l'exemple du calcul relatif au 31.

Adoptons donc cette hypothèse approximative, et désignons généralement par k_n le coefficient de t^{30+n}, dans le développement de $\frac{1}{1-\frac{T}{s}}$, n étant un des nombres 1, 2, 3, ... 10. Ce coefficient exprimera la probabilité d'amener $30+n$, en continuant les tirages, jusqu'à ce qu'on ait atteint ou dépassé ce nombre. Soit, en même temps, p_n la probabilité d'amener ce même nombre, sans passer par l'un des nombres inférieurs 31, 32, ... $30+n-1$; lorsque la quantité k_n aura été calculée pour les 10 valeurs de n comprises depuis $n=1$ jusqu'à $n=10$, il sera aisé d'en conclure les 10 valeurs correspondantes de p_n, qui sont celles qu'il s'agit de déterminer.

En effet, puisqu'on remet les cartes dans le talon, à mesure qu'elles sortent, la probabilité d'amener un *as*, après avoir amené 31, sera égale à $\frac{1}{13}k_1$, par la règle ordinaire des événemens composés; par conséquent, on aura $p_2=k_2-\frac{1}{13}k_1$. De même, la probabilité d'amener un *as*, après avoir amené 32, d'une manière quelconque, et celle d'amener un *deux*, après avoir amené 31, seront $\frac{1}{13}k_1$ et $\frac{1}{13}k_2$; or, en soustrayant ces deux probabilités de celle qui est représentée par k_3, on aura la probabilité d'amener 33, sans avoir passé ni par 31 ni par 32; nous aurons donc $p_3=k_3-\frac{1}{13}k_2-\frac{1}{13}k_1$. En continuant ce raisonnement, on formera cette suite d'équations

$$p_1=k_1,$$

$$p_2=k_2-\frac{1}{13}(k_1+k_2),$$

$$p_3 = k_3 - \frac{1}{13}(k_1 + k_2 + k_3) ;$$

. . . .

$$p_{10} = k_{10} - \frac{1}{13}(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots + k_9) ,$$

au moyen desquelles tout le calcul est réduit à déterminer les valeurs numériques des 10 quautités k_1, k_2, k_3, ... k_{10}, dont la première est déjà connue.

11. Pour les obtenir, développons, comme dans le n.° 9 la fonction $\frac{1}{1-\frac{T}{s}}$, suivant les puissances de t^{10}, et continuons le développement, jusqu'à la puissance t^{40} inclusivement ; nous aurons

$$\frac{1}{1-\frac{T}{s}} = \frac{1-t}{1-(1+a)t} + \frac{a(1-t)(3-4t)t^{10}}{[1-(1+a)t]^2} + \frac{a^2(1-t)(3-4t)^2t^{20}}{[1-(1+a)t]^3}$$

$$+ \frac{a^3(1-t)(3-4t)^3t^{30}}{[1-(1+a)t]^4} + \frac{a^4(1-t)(3-4t)^4t^{40}}{[1-(1+a)t]^5} ,$$

en faisant comme plus haut, $a = \frac{4}{s} = \frac{1}{13}$. Développons ensuite chaque terme, suivant les puissances de t, et prenons la somme des coefficiens de t^{30+n}, il vient

$$k_n = a(1+a)^{30+n-1} + \frac{a}{1}\,\frac{d[(1+a)^{20+n-1}(3a-1)a]}{da}$$

$$+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2[(1+a)^{10+n-1}(3a-1)^2a]}{da^2}+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3[(1+a)^{n-1}(3a-1)^3a]}{da^3},$$

si n est un des nombres 1, 2, 3, ... 9; mais, dans le cas de $n=10$, il faudra ajouter à cette valeur de k_n la quantité $81a^4$, égale 0,002836, à un millionième près, laquelle provient du cinquième terme de l'expression précédente, qui a $81a^4t^{40}$ pour premier terme de son développement suivant les puissances de t.

Au moyen de cette formule, on trouvera, en s'arrêtant aux décimales du 5.e ordre

$$k_1=0,14806,$$

$$k_2=0,14930,$$

$$k_3=0,15039,$$

$$k_4=0,15133,$$

$$k_5=0,15213,$$

$$k_6=0,15278,$$

$$k_7=0,15329,$$

$$k_8=0,15365,$$

$$k_9=0,15386,$$

$$k_{10}=0,15392+0,00284=0,15676;$$

d'où l'on conclut

$$\left.\begin{array}{l}
p_1=0,14806\;,\\
p_2=0,13791\;,\\
p_3=0,12751\;,\\
p_4=0,11689\;,\\
p_5=0,10605\;,\\
p_6=0,09500\;,\\
p_7=0,08375\;,\\
p_8=0,07232\;,\\
p_9=0,06072\;,\\
p_{10}=0,05178\;,
\end{array}\right\}\text{Somme }=0,99999\ (*).$$

(*) Dans l'article de l'Encyclopédie cité au commencement de ce mémoire, on a aussi déterminé ces mêmes probabilités, en supposant qu'elles sont entre elles comme les nombres de cartes différentes qui peuvent terminer les points auxquels elles répondent. Ainsi, par exemple, 31 peut être terminé par toutes les cartes du jeu, depuis l'*as* jusqu'au *dix*, tandis que le point 40 ne peut finir que par un *dix*; et, comme au commencement du jeu, il y a 13 cartes de numéros différens, dont quatre *dix* seulement, il en résulterait, suivant l'article cité, que la probabilité du 31 devrait être égale à trois fois et un quart celle du point 40; ce qui ne s'accorde pas avec les résultats que nous trouvons; et il en serait de même des probabilités des autres points. Mais il est facile de voir que ce raisonnement est inexact. En effet, ils est bien vrai que le 31 peut venir d'un tirage qui aurait amené d'abord 30 et ensuite 1, ou bien 29 et ensuite 2, ou bien 28 et ensuite 3, ... ou bien enfin 21 et ensuite 10. Il est également vrai que le point 40 ne peut venir que par un tirage qui amenerait d'abord 30 et ensuite 10; mais, pour que les probabilités de ces évènemens composées

Comme un des dix événemens auxquels se rapportent ces probabilités doit nécessairement arriver, la somme de leurs valeurs doit être égale à l'unité, ce qui a effectivement lieu, à un cent millième près.

Ces valeurs de p_1, p_2, p_3, ... p_{10}, serviront à régler le sort ou le *parti* des joueurs, après le premier des deux tirages dont un coup est composé. Supposons, par exemple, que ce tirage ait amené le point 34, et soit a la mise d'un joueur qui a parié pour le second tirage; s'il arrive le point 34 au second tirage, le coup est nul, ce qui vaut a pour le joueur; s'il arrive un point moindre que le point 34, le joueur aura gagné, et il recevra $2a$; enfin, s'il arrive un point supérieur à 34, il aura perdu et ne recevra rien. Ce qu'il faudrait lui donner, si l'on renonçait à jouer le second coup, calculé d'après la règle de l'*espérance mathématique*, est donc égal à ($p_4 + 2p_3 + 2p_2 + 2p_1)a$, on a (0,94387 a, ainsi, il aura déjà perdu (0,05613)a, ou à peu près *cinquante-six millièmes* de sa mise. Quand le premier tirage a amené 35, le coup est à l'avantage des joueurs qui ont parié pour le second tirage, et leur *parti* est égal à (1,16681)a; la mise étant toujours représentée par a.

Les carrés p_2^2, p_3^2, p_4^2, ... p_{10}^2, seront les probabilités des coups nuls 32 et 32, 33 et 33, 34 et 34, ... 40 et 40, calculées toujours dans l'hypothèse où l'on remet les cartes dans le jeu à mesure qu'elles sont sorties; mais il sera plus exact de multiplier ces carrés par le rapport $\frac{s+1}{s} = \frac{313}{312}$, comme nous l'avons fait pré-

---

fussent entre elles comme leurs nombres respectifs 13 et 4, il faudrait que les probabilités d'amener les nombres 21, 22, 23, ... 30, par la première partie du tirage fussent égales, ce qui n'a pas lieu, comme on peut s'en assurer

(*Note de* M. Poisson).

cédemment (n.° 7), en calculant la probabilité du 31 de refait. En appelant donc q la probabilité d'un coup nul quelconque, nous aurons

$$q=\left(p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+\ldots+p_{10}{}^2\right)\frac{s+1}{s};$$

ce qui donne, en effectuant le calcul numérique,

$$q=0{,}08810.$$

12. Dans une longue suite de coups, les événemens arrivent, à très-peu près, proportionnellement à leurs probabilités respectives. Ainsi, le rapport du nombre des coups nuls au nombre total des coups s'écartera peu d'être celui de 881 à 10000; et d'après la probabilité d'un refait de 31, que nous avons trouvée (n.° 7), le rapport du nombre des refaits au nombre des coups joués, y compris les coups nuls, sera, à très-peu près, égal à celui de 21967 à 1000000. Mais ces proportions sont des limites dont les résultats du hasard devront s'approcher indéfiniment, à mesure que le nombre des coups deviendra plus grand; et l'on peut déterminer, pour chaque nombre de coups, la probabilité que ces résultats ne s'écarteront pas de leurs limites au-delà d'une quantité donnée.

En désignant par n le nombre total des coups, par m celui des refaits de 31, par p la probabilité d'un refait, par r la probabilité que la différence $\frac{m}{n}-p$ sera comprise entre deux limites données et représentées par

$$-\frac{t\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{n}}, \quad \text{et} \quad +\frac{t\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{n}},$$

on trouvera

$$r = \frac{2}{\sqrt{\varpi}}\int e^{-t^2}dt + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2p(1-p)n\varpi}}\;; \qquad (*)$$

l'intégrale commençant avec t, e étant la base des logarithmes népériens, et ϖ le rapport de la circonférence au diamètre. Quand la variable t augmentera, la probabilité r approchera davantage de l'unité ou de la certitude ; mais, en même temps, les limites de la différence $\frac{m}{n}-p$ seront plus étendues. Au contraire, lorsque t diminuera, ces limites seront plus étroites ; mais la probabilité r qui leur correspond s'affaiblira et finira par devenir très-petite et peu différente de

$$\frac{1}{\sqrt{2p(1-p)n\varpi}}.$$

Quand elle sera égale à $\frac{1}{2}$, on pourra indifféremment espérer que cette différence $\frac{m}{n}-p$, tombera en dedans ou en dehors de ces limites. La variable t restant la même, si le nombre n augmente indéfiniment, la probabilité r variera très-peu, et les limites de la différence $\frac{m}{n}-p$ décroîtront de plus en plus ; de manière qu'on pourra toujours prendre n assez grand pour que ces limites tombent au-dessous de toute quantité donnée. Si l'on considérait la différence $m-np$, entre le nombre m des refaits observés, et le nombre np des refaits calculés d'après leur probabilité p, les limites de cette différence seraient

$$\pm t\sqrt{2p(1-p)n}\;;$$

la probabilité r étant la même que précédemment. Ces limites

(*) Théorie analitique des probabilités, pag. 280.

s'étendront de plus en plus, à mesure que le nombre n augmentera, mais elles croîtront moins rapidement que ce nombre, et seulement dans le rapport de sa racine carrée.

En mettant pour p la valeur 0,021967, les limites de la différence $m-np$ deviendront

$$\pm(0,2674)t\sqrt{n}.$$

Si l'on a, par exemple, $n=1000000$, et qu'on prenne $t=3$, il y aura la probabilité r que le nombre m des refaits observés sera compris entre

$$21967-622 \quad \text{et} \quad 21967+622.$$

Pour calculer la valeur de r, on prendra d'abord l'intégrale que son expression renferme, depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$; ce qui donne

$$\int e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

puis on retranchera de cette intégrale sa valeur prise depuis $t=3$ jusqu'à $t=\infty$, valeur qui sera donnée par la série

$$\int e^{-t^2}dt=e^{-t^2}\left(\frac{1}{2t}-\frac{1.3}{2^2.t^3}+\frac{1.3.5}{2^3.t^5}-\frac{1.3.5.7}{2^4.t^7}+\ldots\ldots\right),$$

dans laquelle on fera $t=3$. On trouve, de cette manière,

$$r=0,9998;$$

de sorte qu'il y a près de 5000 à parier contre 1 que, sur un million de coups, le nombre des refaits ne sera pas moindre que 21345, et n'excèdera pas 22589. Si le nombre observé sortait de ces limites, il serait très-probable qu'il y a eu erreur involontaire, ou que quelqu'un a trompé au jeu.

On peut se demander quelle doit être la valeur de t pour laquelle on aurait $r=\frac{1}{2}$: cette valeur sera donnée par l'équation

$$t-\frac{t^3}{1.3}+\frac{t^5}{1.2.5}-\frac{t^7}{1.2.3.7}+\frac{t^9}{1.2.3.4.9}-\ldots=\frac{\sqrt{\pi}}{4}-\frac{e^{-t^2}}{2(0,2074)\sqrt{n}};$$

En négligeant d'abord le second terme de son second membre, on trouve que la valeur de t est à très-peu près égale à 0,45. Si l'on fait ensuite $t=0,45+x$, et que l'on détermine x, en négligeant son carré et ses puissances supérieures, on trouve

$$t=0,4460-\frac{1}{2(0,2074)\sqrt{n}};$$

d'où il résulte qu'il y a un contre un à parier que sur un grand nombre n de coups, le nombre m des refaits sera compris entre les deux limites

$$(0,021967)n\pm[(0,0924)\sqrt{n}-\tfrac{1}{2}].$$

Ainsi, sur un million de coups, par exemple, il sera indifférent de parier que le nombre de refaits différera de 21967, en plus ou en moins, d'un nombre plus grand ou d'un nombre plus petit que 92.

En général, lorsque deux joueurs jouent l'un contre l'autre, à jeu égal, il y a la probabilité r que le nombre des parties que l'un des deux, sans désigner lequel, gagnera de plus que l'autre, sur un très-grand nombre de coups, n'excèdera pas le double de $t\sqrt{2p(1-p)n}$, en faisant dans ce double $p=\frac{1}{2}$; ce qui donne $t\sqrt{2n}$. Si donc on prend pour t la valeur qui répond à $r=\frac{1}{2}$, il y aura un contre un à parier que la différence entre les nombres de parties gagnées par les deux joueurs n'excèdera pas

$$(0,6307)\sqrt{n}-1;$$

ce qui fait 630, par chaque million de parties. Il y aurait donc du désavantage à parier, par exemple, que l'un des joueurs gagnerait moins de 600 parties de plus que l'autre, et de l'avantage à parier que la différence des parties gagnées n'excéderait pas 650 parties.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue.

Par M. Gergonne.

Tantum series juncturaque pollet. (Hor.)

Les diverses théories dont se compose le domaine de la science de l'étendue peuvent être rangées en deux classes très-distinctes. Il est, en effet, certaines de ces théories qui dépendent essentiellement des *relations métriques* qui se trouvent exister entre les diverses portions d'étendue que l'on compare, et qui conséquemment ne sauraient être établies qu'à l'aide des principes du calcul. D'autres, au contraire, sont tout-à-fait indépendantes de ces mêmes relations, et résultent uniquement de la *situation* que se trouvent avoir les uns par rapport aux autres, les êtres géométriques sur lesquels on raisonne; et, bien que très-souvent on les déduise des proportions et du calcul, on peut toujours, en s'y prenant d'une manière convenable, les en dégager complètement. Mais il peut quelquefois devenir nécessaire pour cela de passer tour à tour de la géométrie plane à celle de l'espace et de celle-ci à la première, comme Monge et les géomètres de son école l'ont si souvent pratiqué, et avec tant de succès.

Il est donc raisonnablement permis de se demander, d'après cela,

si notre manière de diviser la géométrie en *géométrie plane* et *géométrie de l'espace* est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader. Toujours du moins demeure-t-il vrai qu'en y renonçant on parviendrait, en ne recourant, pour ainsi dire, qu'à la simple intuition, à pousser assez avant dans la géométrie des commençans que l'étude du calcul, présentée dès l'entrée, ne rebute que trop souvent, et qui peut-être s'y livreraient plus tard avec beaucoup moins de répugnance, lorsque leur intelligence se serait agrandie et fortifiée, par l'étude d'une série plus ou moins prolongée de propriétés de l'étendue.

Mais un caractère extrêmement frappant de cette partie de la géométrie qui ne dépend aucunement des relations métriques entre les parties des figures ; c'est qu'à l'exception de quelques théorèmes symétriques d'eux-mêmes, tels, par exemple, que le théorème d'Euler sur les polyèdres, et son analogue sur les polygones, tous les théorèmes y sont doubles ; c'est-à-dire que, dans la géométrie plane, à chaque théorème il en répond toujours nécessairement un autre qui s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mots *points* et *droites* ; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont les mots *points* et *plans* qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son corrélatif

Parmi un grand nombre d'exemples que nous pourrions puiser, dans le présent recueil, de cette sorte de *dualité* des théorèmes qui constituent la *géométrie de situation*, nous nous bornerons à indiquer, comme les plus remarquables, les deux élégans théorèmes de M. Coriolis, démontrés d'abord à la page 326 du XI.ᵉ volume, puis à la page 69 du XII.ᵉ, et l'article que nous avons nous-même publié à la page 157 du précédent volume, sur les lois générales qui régissent les polyèdres. C'est, au surplus, une suite inévitable des propriétés des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjuguées des lignes et surfaces du second ordre, qui jouent ici un rôle assez analogue à celui que joue le triangle supplémen-

taire, dans la trigonométrie sphérique où, comme il a été montré, dans tout le cours de l'intéressant mémoire de M. Sorlin (tom. XV, pag. 273), les théorèmes peuvent également être répartis en en deux séries parallèles, de manière à se correspondre deux à deux, avec la plus grande exactitude.

Toutefois, quelque digne de remarque que puisse être un fait géométrique de cette importance, et quelque ressource qu'il puisse offrir, dans un grand nombre de cas, pour faire deviner, en quelque sorte, de nouveaux théorèmes, à peine a-t-il été entrevu, même par les géomètres qui, dans ces derniers temps, se sont le plus spécialement occupés de la recherche des propriétés de l'étendue; tant est peu philosophique encore, même de nos jours, la manière d'étudier les sciences.

Voilà ce qui nous détermine à faire de cette sorte de géométrie *en parties doubles*, s'il est permis de s'exprimer ainsi, le sujet d'un écrit spécial dans lequel, après avoir rendu manifeste le fait philosophique dont il s'agit, dans l'exposé même des premières notions, nous nous en appuyerons, soit pour démontrer quelque théorèmes nouveaux, soit pour donner de quelques théorèmes déjà connus des démonstrations nouvelles, qui les rendent à l'avenir tout à fait indépendans des relations métriques desquelles on a été jusqu'ici dans l'usage de les déduire.

Nous pourrions fort bien nous borner à démontrer seulement une moitié de nos théorèmes, et à en déduire l'autre moitié, à l'aide de la théorie des pôles. Mais nous préférons les démontrer directement les uns et les autres, tant pour ne pas sortir des premiers élémens et rendre ce qu'on va livre accessible à ceux là-même qui ne connaissent pas les *Élémens d'Euclide*, que pour avoir l'occasion de faire remarquer qu'il existe entre les démonstrations de deux théorèmes d'une même couple la même correspondance qu'entre leurs énoncés. Nous aurons même soin, afin de rendre cette correspondance plus apparente, de présenter les théorèmes analogues dans deux colonnes, en regard l'une de l'autre, comme nous en

avons déjà usé, dans l'article sur les polyèdres rappelé plus haut ; de telle sorte que les démonstrations puissent se servir réciproquement de contrôle.

Nous croyons superflu d'accompagner ce mémoire de figures, souvent plus embarrassantes qu'utiles, dans la géométrie de l'espace ; figures que nous ne pourrions d'ailleurs offrir que sous un aspect unique et individuel au lecteur qui pourra, au contraire, les construire et façonner à son gré, si toutefois il en juge le secours nécessaire. Il ne s'agit ici, en effet, que de déductions logiques, toujours faciles à suivre, lorsque les notations sont choisies d'une manière convenable.

§. I.

Notions préliminaires.

1. Deux points, distincts l'un de l'autre, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux points sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.

1. Deux plans, non parallèles, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux plans sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.

2. Trois points donnés dans l'espace, ne se confondant pas deux à deux et n'appartenant pas à une même ligne droite, déterminent un plan indéfini qui, lorsque ces trois points sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.

2. Trois plans, non parallèles deux à deux dans l'espace, et ne passant pas par une même ligne droite, déterminent un point qui, lorsque ces trois plans sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.

3. Un plan peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un point qui ne

3. Un point peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un plan dans le-

s'y trouve pas contenu, ou encore par deux droites qui concourent en un même point.

4. Ce n'est qu'accidentellement que des points, au nombre de plus de trois, dans l'espace, déterminent un plan unique, que l'on peut alors désigner par la totalité des lettres qui désignent ces différens points. Ce n'est aussi qu'accidentellement que deux droites, et à plus forte raison un plus grand nombre, sont dans un même plan.

5. Généralement parlant, des points en nombre n, déterminent, dans l'espace, des droites au nombre de

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2},$$

et des plans au nombre de

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}.$$

Ce n'est qu'accidentellement qu'ils en déterminent un moindre nombre.

6. Si l'on peut prouver de plus de deux droites que, sans passer toutes par un même point, deux d'entre elles, de quelque

quel elle ne se trouve pas située, ou encore par deux droites situées dans un même plan.

4. Ce n'est qu'accidentellement que des plans, au nombre de plus de trois, dans l'espace, déterminent un point unique, que l'on peut alors désigner par la totalité des lettres qui désignent ces différens plans. Ce n'est aussi qu'accidentellement que deux droites, et à plus forte raison un plus grand nombre concourent en un même point.

5. Généralement parlant, des plans en nombre n, déterminent, dans l'espace, des droites au nombre de

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2},$$

et des points au nombre de

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}.$$

Ce n'est qu'accidentellement qu'ils en déterminent un moindre nombre,

6. Si l'on peut prouver de plus de deux droites que, sans être toutes dans un même plan, deux d'entre elles, de quelque manière

manière qu'on les choisisse, sont toujours dans un même plan, on en pourra conclure qu'elles sont toutes situées dans un plan unique.

7. Quatre droites, comprises dans un même plan, déterminent, en général, six points, distribués trois à trois sur ces quatre droites. Ces six points déterminent trois nouvelles droites qui, à leur tour, déterminent trois nouveaux points.

9. Des points, en nombre quelconque, situés dans un même plan, peuvent être considérés comme les *sommets* d'un polygone, dont les *côtés* sont déterminés par ces mêmes points, pris consécutivement deux à deux, et dans un ordre quelconque, du premier au dernier et de celui-ci au premier.

10. Des droites, en nombre quelconque, issues d'un même point de l'espace, peuvent être considérées comme les *arêtes* d'un angle polyèdre, dont les *faces* sont déterminées par ces mêmes droites, prises consécutivement deux à deux, et dans un ordre

qu'on les choisisse, concourent toujours en un même point, on en pourra conclure qu'elles concourent toutes en un point unique.

7. Quatre droites issues d'un même point de l'espace, déterminent, en général, six plans, passant trois à trois par ces quatre droites. Ces six plans déterminent trois nouvelles droites qui à leur tour, déterminent trois nouveaux plans.

9. Des plans, en nombre quelconque, issus d'un même point de l'espace, peuvent être considérés comme les *faces* d'un angle polyèdre, dont les *arêtes* sont déterminées par ces mêmes plans, pris consécutivement, deux à deux, et dans un ordre quelconque, du premier au dernier et de celui-ci au premier.

10. Des droites, en nombre quelconque, situées dans un même plan, peuvent être considérées comme les *côtés* d'un polygone, dont les *sommets* sont déterminés par ces mêmes droites, prises consécutivement deux à deux, et dans un ordre quelconque, de

quelconque, de la première à la dernière, et de celle-ci à la première.

11. Un polygone qui a autant de côtés qu'un autre a de sommets est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux polygones étant situés dans un même plan, les sommets du dernier sont respectivement situés sur les directions des côtés du premier.

12. Un angle polyèdre qui a autant de faces qu'un autre a d'arêtes, est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux angles polyèdres ayant même sommet, les arêtes du dernier sont respectivement dans les plans des faces du premier.

13. Un polygone est dit *inscrit* à un angle polyèdre qui a autant d'arêtes que ce polygone a de sommets, lorsque les sommets du polygone sont respectivement sur les arêtes de l'angle polyèdre.

14. Des points, en nombre quelconque, dans l'espace, peuvent être considérés comme les *sommets* d'un polyèdre. Ceux de ces points qui appartiennent à un même plan déterminent les

la première à la dernière, et de celle-ci à la première.

11. Un angle polyèdre qui a autant d'arêtes qu'un autre a de faces, est dit *inscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux angles polyèdres ayant même sommet, les plans des faces du dernier contiennent respectivement les arêtes du premier.

12. Un polygone qui a autant de sommets qu'un autre a de côtés, est dit *inscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux polygones étant situés dans un même plan, les directions des côtés du dernier contiennent respectivement les sommets du premier.

13. Un angle polyèdre est dit *circonscrit* à un polygone qui a autant de côtés que cet angle polyèdre a de faces, lorsque les faces de l'angle polyèdre contiennent respectivement les côtés du polygone.

14. Des plans, en nombre quelconque, dans l'espace, peuvent être considérés comme les *faces* d'un polyèdre. Ceux de ces plans qui passent par un même point déterminent les *sommets* du polyè-

faces du polyèdre, dont les *arêtes* sont les côtés de ces mêmes faces.

dre, dont les *arêtes* sont celles de ces mêmes sommets.

15. Un polyèdre qui a autant de faces qu'un autre a de sommets, est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque les sommets du dernier sont respectivement dans les plans des faces du premier.

15. Un polyèdre qui a autant de sommets qu'un autre a de faces, est dit *inscrit* à celui-ci, lorsque les plans des faces du dernier contiennent respectivement les sommets du premier.

Remarque. Dans ce qui précède, nous avons disposé les propositions, en regard les unes des autres, comme elles doivent l'être dans la géométrie à trois dimensions, et nous en userons de même dans tout ce qui va suivre. Dans la géométrie plane, leur correspondance serait un peu différente. Alors, par exemple, la proposition 8 de la série de droite devrait correspondre à la proposition 7 de la série de gauche.

Les géomètres ayant remarqué que les droites que déterminent deux sommets non consécutifs d'un polygone ou d'un polyèdre, ainsi que les plans que déterminent deux arêtes non consécutives d'un angle polyèdre, jouaient un rôle assez important en géométrie, ont cru utile de leur donner des dénominations particulières, et ils les ont appelés *diagonales* et *plans diagonaux*. Mais les points que déterminent deux côtés non consécutifs d'un polygone; mais les droites que déterminent les plans de deux faces non consécutives, soit d'un polyèdre soit d'un angle polyèdre, ne sont pas d'une moindre importance, et pourtant on ne leur a assigné aucune dénomination spéciale. On n'aurait sans doute pas manqué de le faire, si les relations que nous nous efforçons ici de faire ressortir avaient été aperçues par les créateurs de la science; ce qui prouve, pour le dire en passant, que ce n'est seulement que lorsqu'une science est déjà parvenue en un assez haut degré de maturité qu'on peut espérer d'en bien faire la langue. Quoi qu'il en soit, plutôt que de créer des dénominations nouvelles, qui pourraient fort bien ne

pas plaire également à tous les lecteurs, nous préferons nous interdire ici l'usage des mots *diagonales* et *plans diagonaux*, qui manqueraient d'analogues, et les remplacer constamment par la périphrase équivalente.

Souvent à l'avenir, de ce que deux droites seront situées dans un même plan, il nous arrivera de conclure qu'elles concourent en un même point; mais il faudra alors sous-entendre que ce point peut fort bien être infiniment éloigné.

§. II.

Théorèmes sur les triangles, les quadrilatères, les angles trièdres et les angles tétraèdres.

16. *THÉORÈME. Si deux triangles sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs sommets correspondans concourent toutes trois au même point; leur côtés correspondans concourront en trois points qui appartiendront à une même ligne droite.*

Démonstration. Soient A, B, C les trois sommets de l'un des triangles, et A', B', C' leurs correspondans respectifs dans l'autre, de manière que les droites AA', BB', CC' concourent en un même point P.

Les deux droites AA', BB', concourant en un même point P, sont dans un même plan,

16. *THÉORÈME. Si deux angles trièdres sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes trois situées dans un même plan; leurs arêtes correspondantes détermineront trois plans qui se couperont suivant une même ligne droite.*

Démonstration. Soient A, B, C les trois faces de l'un des angles trièdres, et A', B', C' leurs correspondantes respectives dans l'autre, de manière que les droites AA', BB', CC' soient situées dans un même plan P.

Les deux droites AA', BB' étant situées dans un même plan P, concourent en un même point;

qui contiendra conséquemment les quatre points A, A′, B, B′; donc les droites AB et A′B′ sont dans ce plan, et doivent, par suite, concourir en un point. Ainsi, deux côtés correspondans quelconques, dans les deux triangles, concourent en un point.

Soient respectivement α, β, γ, les points de concours des côtés correspondans BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′, des deux triangles. Parce que ces points sont situés sur les directions des trois côtes du triangle ABC, ils doivent être dans le plan de ce triangle; mais, parce qu'ils sont situés sur les directions des trois côtés du triangle A′B′C′, ils doivent être aussi dans le plan de ce dernier triangle; donc les trois points α, β, γ se trouvent à la fois dans deux plans; donc ils appartiennent à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire, à une ligne droite.

Si l'on conçoit que le point de concours des trois droites que déterminent les sommets correspondans des deux triangles s'approche sans cesse du plan de l'un

où concourront conséquemment les quatre plans A, A′, B, B′, donc les droites AB et A′B′ concourent aussi en ce point, et par suite sont dans un même plan. Ainsi, deux arêtes correspondantes quelconques, dans les deux angles trièdres, sont situées dans un même plan.

Soient respectivement α, β, γ les plans qui contiennent les arêtes correspondantes BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′ des deux angles trièdres. Parce que ces plans contiennent les trois arêtes de l'angle trièdre ABC, ils doivent concourir à son sommet; mais, parce qu'ils contiennent les trois arêtes de l'angle trièdre A′B′C′, ils doivent aussi concourir au sommet de ce dernier angle trièdre; donc les trois plans α, β, γ passent à la fois par les deux mêmes points; donc ils contiennent tous trois la droite que déterminent ces deux points; c'est-à-dire, qu'ils se coupent tous trois suivant la même droite.

Si l'on conçoit que le plan des trois droites que déterminent les faces correspondantes des deux angles trièdres s'approche sans cesse du sommet de l'un d'eux,

d'eux; le plan de l'autre fera avec le sien un angle sans cesse décroissant, jusqu'à ce qu'enfin ces deux plans se confondront en un seul, contenant le point dont il s'agit; et comme, dans ce mouvement, les trois points α, β, γ n'auront pas cessé d'appartenir à une même ligne droite; il en résulte le théorème suivant :

17. *THÉORÈME. Si deux triangles, situés dans un même plan, sont tels que les droites que déterminent leurs sommets correspondans passent toutes trois par un même point; les points que détermineront leurs côtés correspondans appartiendront tous trois à une même droite.*

18. Donc, *THÉORÈME. Si deux angles trièdres de même sommet sont tels que les plans que déterminent leurs arêtes correspondantes passent tous trois par une même droite; les droites que détermineront leurs faces correspondantes seront toutes trois dans un même plan.*

Démonstration. Si, en effet, on coupe les deux angles trièdres par un même plan, qui ne passe pas par leur sommet commun, les sections seront deux triangles,

la distance de ce sommet au sommet de l'autre ira sans cesse en décroissant, jusqu'à ce qu'enfin ces deux sommets se confondront en un seul point, situé dans le plan dont il s'agit; et comme, dans ce mouvement, les trois plans α, β, γ n'auront pas cessé de se couper suivant une même droite, il en résulte le théorème suivant :

17. *THÉORÈME. Si deux angles trièdres de même sommet sont tels que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes trois dans un même plan, les plans que détermineront leurs arêtes correspondantes se couperont tous trois suivant une même droite.*

18. Donc, *THÉORÈME. Si deux triangles, situés dans un même plan, sont tels que les points que déterminent leurs côtés correspondans appartiennent tous trois à une même droite, les droites que détermineront leurs sommets correspondans passeront toutes trois par un même point.*

Démonstration. Si, en effet, on considère ces deux triangles comme les sections, par un même plan, de deux angles trièdres, ayant un même sommet hors de ce plan,

dans le cas de la proposition ci-dessus (17); d'où il résulte évidemment que les deux angles trièdres doivent jouir de la propriété annoncée.

ces deux angles trièdres se trouveront dans le cas de la proposition ci-dessus (17); d'où il résulte évidemment que les deux triangles doivent jouir de la propriété annoncée.

Remarques. La correspondance entre ces divers théorèmes est ici telle que l'exige la géométrie de l'espace. Dans la géométrie plane, au contraire, le numéro 18 (*série de droite*) répondrait au numéro 17 (*série de gauche*).

Les théorèmes compris sous ces deux numéros, susceptibles de revêtir une multitude de formes différentes, et desquels on en peut déduire un grand nombre d'autres, sont fondamentaux, dans la *géométrie de la règle.* Ils offrent, en particulier, les méthodes les plus simples qu'on puisse employer, pour la résolution des deux problèmes suivans, se correspondant l'un à l'autre, dans la géométrie plane : I. *Deux points déterminant une droite inconnue, qu'un obstacle empêche de tracer, trouver sur une droite donnée,* EN NE FAISANT USAGE QUE DE LA RÈGLE, *un troisième point de cette droite ?* II. *Un point inconnu devant être déterminé par deux droites, qu'un obstacle empêche de prolonger, mener, par un point donné,* EN NE FAISANT USAGE QUE DE LA RÈGLE, *une troisième droite qui passe par ce point ?*

Si l'on suppose (17, *série de droite* et 18, *série de gauche*) que le sommet commun des deux angles trièdres devient le centre d'une sphère de rayon quelconque, on obtiendra, sur la sphère, des théorèmes analogues aux théorèmes 17 (*série de gauche*) et 18 (*série de droite*), dans lesquels les droites se trouveront remplacées par des arcs de grands cercles. On en conclura la possibilité de résoudre, sur la sphère, des problèmes analogues aux deux que nous venons d'énoncer, en ne faisant usage que du *compas règle*, c'est-à-dire, du compas à ouverture fixe, servant à décrire des grands cercles, et dans lequel, conséquemment, la

distance entre les points est l'hypothénuse d'un triangle isocèle rectangle, dont les deux côtés de l'angle droit sont égaux au rayon de la sphère.

Parmi les nombreuses conséquences qui résultent des théorèmes (17 et 18), nous nous bornerons à signaler les suivantes;

19. *THÉORÈME. Si deux quadrilatères sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, de telle sorte que les droites que déterminent leurs sommets opposés passent toutes quatre par un même point; les points que détermineront leurs côtés opposés appartiendront tous quatre à une même ligne droite.*

Démonstration. Soient A et B deux sommets de l'inscrit adjacens à un même côté; et soient A′ et B′ leurs opposés respectifs. Soient désignés respectivement par α, β, α', β', les côtés du circonscrit qui contiennent les points A, B, A′, B′; les côtés consécutifs de l'inscrit seront AB, BA′, A′B′, B′A; et les sommets correspondans du circonscrit seront $\alpha\beta$, $\beta\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\alpha$.

On suppose que les deux droites AA′ et BB′, celle que déterminent les deux sommets $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, et celle que déterminent les deux sommets $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$, passent toutes quatre par un même point

19. *THÉORÈME. Si deux angles tétraèdres sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, de telle sorte que les droites que déterminent leurs faces opposées soient toutes quatre dans un même plan; les plans que détermineront leurs arêtes opposées passeront tous quatre par une même droite.*

Démonstration. Soient A et B deux faces du circonscrit adjacentes à une même arête; et soient A′ et B′ leurs opposées respectives. Soint désignées respectivement par α, β, α', β' les arêtes de l'inscrit qui sont contenues dans les plans A, B, A′, B′; les arêtes consécutives du circonscrit seront AB, BA′, A′B′, B′A; et les faces correspondantes de l'inscrit seront $\alpha\beta$, $\beta\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\alpha$.

On suppose que les deux droites AA′ et BB′, celle que déterminent les deux faces $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, et celle que déterminent les deux faces $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$, sont toutes quatre dans un même plan P; Si donc l'on com-

P ; si donc l'on compare le triangle dont les trois sommets sont A, B et $\alpha\beta$ à celui dont les trois sommets sont A', B' et $\alpha'\beta'$, on verra que, par l'hypothèse, les droites que déterminent leurs sommets correspondans passent toutes trois par un même point P ; d'où l'on conclura (17) que leurs côtés correspondans AB et A'B' déterminent un point en ligne droite avec les deux points $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$. La comparaison du triangle dont les sommets sont A, B' et $\alpha\beta'$ à celui dont les sommets sont A', B et $\alpha'\beta$ prouvera semblablement que le point déterminé par les côtés AB' et A'B est aussi en ligne droite avec les deux mêmes points $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$; ce qui complète la démonstration du théorème.

En raisonnant comme nous l'avons fait (18), on conclura facilement de là cet autre théorème :

20. *THÉORÈME. Si deux angles tétraèdres sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre, de telle sorte que les plans que déterminent leurs arêtes opposées passent tous quatre par une même droite, les droites que détermineront leurs*

pare l'angle trièdre dont les trois faces sont A, B et $\alpha\beta$ à celui dont les trois faces sont A', B' ; et $\alpha'\beta'$, on verra que, par l'hypothèse, les droites que déterminent leur faces correspondantes sont toutes trois dans un même plan P, d'où l'on conclura (17) que leurs arêtes correspondantes AB et A'B' déterminent un plan coupant, suivant une même ligne droite, les deux plans $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$. La comparaison de l'angle trièdre dont les faces sont A, B' et $\alpha\beta'$ à celui dont les faces sont A', B et $\alpha'\beta$ prouvera semblablement que le plan déterminé par les arêtes AB' et A'B coupe, suivant une même droite, les deux même plans $\alpha\alpha$ et $\beta\beta'$; ce qui complète la démonstration du théorème.

En raisonnant comme nous l'avons fait (18), on conclura facilement de là cet autre théorème :

20. *THÉORÈME. Si deux quadrilatères sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre, de telle sorte que les points que déterminent leurs côtés opposés appartiennent tous quatre à une même droite ; les droites que détermi-*

faces opposées appartiendront toutes quatre à un même plan.

neront leurs sommets opposés passeront toutes quatre par un même point.

Remarques. Il est plus que superflu d'observer qu'en géométrie plane ce serait le n.° 20 (*série de droite*) qui correspondrait au n.° 19 (*série de gauche*).

Il est facile de voir que les théorèmes compris sous ces deux numéros ont leurs analogues sur la sphère, lesquels se déduiront des numéros 19 (*série de droite*) et 20 (*série de gauche*), en supposant que le sommet commun des deux angles tétraèdres devient le centre d'une sphère.

Ce sera ici le lieu très-naturel des deux théorèmes de M. Coriolis déjà cités, démontrés, comme ils l'ont été, tom. XII, pag. 70. Ils auront leurs correspondans dans l'espace, desquels on en déduira d'analogues sur la sphère.

§. III.

Théorèmes sur les polyèdres.

21. *THÉORÈME. Si deux tétraèdres sont tellement disposés dans l'espace que les droites que déterminent leurs sommets correspondans passent toutes quatre par un même point; les droites que détermineront leurs faces correspondantes seront toutes quatre dans un même plan.*

Démonstration. On voit d'abord (16) que les trois arêtes d'une même face de l'un des tétraèdres concourront avec leurs cor-

21. *THÉORÈME. Si deux tétraèdres sont tellement disposés dans l'espace que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes quatre dans un même plan; les droites que détermineront leurs sommets correspondans passeront toutes quatre par un même point.*

Démonstration On voit d'abord (16) que les trois arêtes d'un même sommet de l'un des tétraèdres, avec leurs correspondantes

respondantes dans l'autre en trois points qui appartiendront à une même ligne droite, déterminée par les plans de ces deux faces; donc les arêtes de l'un et leurs correspondantes dans l'autre concourront en six points, distribués trois à trois sur les quatre droites déterminées par les plans des faces correspondantes; d'où il est facile de conclure que ces quatre droites appartiendront à un même plan.

22. *THÉORÈME. Dans tout octaèdre hexagone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point; les droites que déterminent les faces opposées appartiennent toutes quatre à un même plan.*

Démonstration. On voit d'abord (16) que les arêtes d'une face quelconque de l'octaèdre et leurs opposées, dans la face opposée à celle-là, concourront en trois points, situés dans une même ligne droite, déterminée par les plans de ces deux faces; donc les douze arêtes de l'octaèdre concourront deux à deux en six points, distribués trois à trois sur les quatre droites déterminées par les

dans l'autre détermineront trois plans se coupant suivant une même droite, déterminée par les deux sommets dont il s'agit; donc les arêtes de l'un et leurs correspondantes dans l'autre détermineront six plans, passant trois à trois par les quatre droites déterminées par les sommets correspondans; d'où il est facile de conclure que ces quatre droites concourront en un même point.

22. *THÉORÈME. Dans tout hexaèdre octogone tel que les droites que déterminent les faces opposées sont toutes trois dans un même plan; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes quatre par un même point.*

Démonstration. On voit d'abord (16) que les arêtes d'un sommet quelconque de l'hexaèdre et leurs opposées, du sommet opposé à celui-là, détermineront trois plans se coupant suivant une même ligne droite, déterminée par les deux sommets dont il s'agit; donc les douze arêtes de l'hexaèdre détermineront deux à deux six plans, se coupant trois à trois suivant les quatre droites déterminées par

plans des faces opposées ; d'où il est aisé de conclure que ces quatre droites appartiendront à un même plan.

23. Réciproquement, *THÉORÈME. Dans tout octaèdre hexagone tel que les droites que déterminent les faces opposées sont toutes quatre dans un même plan ; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point.*

Démonstration. Ces quatre droites étant dans un même plan, chacune d'elles contient trois de leurs six points d'intersection, lesquels sont, en même temps, les points de concours des arêtes opposées ; donc les trois arêtes d'une même face et leurs trois opposées dans la face opposée concourent en trois points appartenant à une même droite ; d'où l'on doit conclure (17, *série de droite*) que les droites que déterminent les sommets opposés de l'octaèdre passent toutes trois par un même point.

Remarques. Les six points de concours des arêtes opposées de l'octaèdre, distribués trois à trois sur quatre droites situées dans

les sommets opposés ; d'où il est aisé de conclure que ces quatre droites passeront par un même point.

23. Réciproquement, *THÉORÈME. Dans tout hexaèdre octogone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes quatre par un même point ; les droites que déterminent les faces opposées sont toutes trois dans un même plan.*

Démonstration. Ces quatre droites passant par un même point, chacune d'elle est la commune section de trois des six plans qu'elles déterminent deux à deux, lesquels sont, en même temps, les plans déterminés par les arêtes opposées ; donc les trois arêtes d'un même sommet et leurs trois opposées du sommet opposé déterminent trois plans se coupant suivant une même droite ; d'où l'on doit conclure (17, *série de gauche*) que les droites que déterminent les faces opposées de l'hexaèdre sont toutes trois dans un même plan.

Remarques. Les six plans déterminés par les arêtes opposées de l'hexaèdre, se coupant trois à trois suivant quatre droites pas-

un même plan, déterminent (7) trois nouvelles droites, lesquelles ne sont autre chose que les intersections du plan de ces quatre droites avec les trois plans qui contiennent deux à deux les droites que déterminent les sommets opposés de l'octaèdre. Ces nouvelles droites déterminent trois nouveaux points qui sont ceux où ce même plan est percé par les droites que déterminent les sommets opposés.

On voit aussi que les octaèdres hexagones du genre de ceux que nous considérons ici peuvent, de trois manières différentes, être envisagés comme la *somme* ou la *différence* de deux pyramides quadrangulaires, de même base, suivant que les deux sommets sont de *différens* côtés ou du *même* côté de la base commune.

Une partie de ce qui précède peut encore être énoncé de la manière suivante :

24. *THÉORÈME. Si l'on construit dans l'espace trois quadrilatères, ayant deux à deux, deux sommets opposés communs, et conséquemment six sommets en*

sant par un même point, déterminent (7) trois nouvelles droites lesquelles ne sont autre chose que celles qui joignent le point de concours de ces quatre droites aux trois points que déterminent deux à deux les droites intersections des plans des faces opposées de l'hexaèdre. Ces nouvelles droites déterminent deux à deux trois nouveaux plans qui sont ceux qui contiennent le point de concours des quatre premières droites et les droites que déterminent les faces opposées.

On voit que les hexaèdres octogones du genre de ceux que nous considérons ici peuvent, de trois manières différentes, être envisagés comme la *différence* ou la *somme* de deux pyramides quadrangulaires de même sommet, suivant que les deux bases sont du *même* côté ou de *différens* côtés du sommet commun.

Une partie de ce qui précède peut encore être énoncé de la manière suivante :

24. *THÉORÈME. Si l'on construit dans l'espace trois angles tétraèdres, ayant, deux à deux, deux faces opposées communes, et conséquemment six fa-*

tout, de manière que les droites déterminées par leurs sommets opposés, lesquelles ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, passent toutes par un même point; les points que détermineront leurs côtés opposés seront six points distribués trois à trois sur quatre droites comprises dans un même plan. En outre, ces six points détermineront trois nouvelles droites qui seront celles suivant lesquelles leur plan sera coupé par les plans des trois quadrilatères; et ces nouvelles droites détermineront, à leur tour, trois nouveaux points, qui seront ceux où le même plan sera percé par les droites que déterminent les sommets opposés communs aux trois quadrilatères pris deux à deux.

ces en tout, de manière que les droites déterminées par les plans de leurs faces opposées, lesquelles ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, soient toutes trois dans un même plan; les plans que détermineront leurs arêtes opposées seront six plans se coupant trois à trois suivant quatre droites passant par un même point. En outre, ces six plans détermineront trois nouvelles droites contenant le point commun aux quatre premières et les sommets des trois angles tétraèdres; et ces nouvelles droites détermineront, à leur tour, trois nouveaux plans, dont chacun contiendra le point commun aux six premiers, et une des droites déterminées par les plans des faces opposées communes aux trois angles tétraèdres pris deux à deux.

Rien n'empêche de supposer que les trois quadrilatères sont dans un même plan (*); et, si alors on raisonne comme on l'a

Rien n'empêche de supposer que les trois angles tétraèdres ont même sommet; et, si alors on raisonne comme on l'a fait

(*) On obtient ainsi le théorème dont la démonstration a été demandée à la page 396 du XV.e volume du présent recueil.

(18), on obtiendra ce nouveau théorème :

25. THÉORÈME. *Si l'on construit trois angles tétraèdres de même sommet, ayant, deux à deux, deux arêtes opposées communes, et conséquemment six arêtes en tout, de manière que les plans déterminés par leurs arêtes opposées, lesquels ne seront ici qu'au nombre de trois seulement passent par une même droite; les droites que détermineront leurs faces opposées seront six droites distribuées trois à trois sur quatre plans passant par le sommet commun des trois angles tétraèdres. En outre, ces six droites détermineront trois nouveaux plans, passant aussi par ce sommet commun; et ces trois derniers plans détermineront trois nouvelles droites dont chacune sera dans le plan des arêtes opposées de l'un des angles tétraèdres.*

En particulier, ce théorème contient le suivant;

26. THÉORÈME. *Dans tout angle hexaèdre, tel que les plans que déterminent les arêtes opposées passent tous trois par la même droite; les droites que dé-*

(18), on obtiendra ce nouveau théorème :

25. THÉORÈME. *Si l'on construit, sur un même plan trois quadrilatères, ayant, deux à deux, deux côtés opposés communs, et conséquemment six côtés en tout, de manière que les points déterminés par leurs côtés opposés, lesquels ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, appartiennent à une même droite; les droites que détermineront leurs sommets opposés, seront six droites se coupant trois à trois en quatre points du plan de ces quadrilatères. En outre, ces six droites détermineront trois nouveaux points de ce plan; et ces trois points détermineront trois nouvelles droites dont chacune contiendra le point déterminé par deux côtés opposés de l'un des quadrilatères.*

En particulier, ce théorème contient le suivant :

26. THÉORÈME. *Dans tout hexagone tel que les points que déterminent les côtés opposés, appartiennent tous trois à une même droite; les droites que dé-*

terminent les faces opposées appartiennent toutes trois à un même plan.

Puis, en raisonnant comme nous l'avons fait (18);

27. *THÉORÈME. Dans tout hexagone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par le même point; les points que déterminent les côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite.*

terminent les sommets opposés passent toutes trois par le même point.

Puis, en raisonnant comme nous l'avons fait (18);

27. *THÉORÈME. Dans tout angle hexaèdre tel que les droites que déterminent les faces opposées appartiennent toutes trois à un même plan; les plans que déterminent les arêtes opposées passent tous trois par une même droite.*

En Géométrie plane, ce serait le n.° 26 (*série de droite*) qui correspondrait au n.° 27 (*série de gauche*).

28. *THÉORÈME. Dans tout hexagone gauche tel que ses côtés opposés sont deux à deux dans trois plans; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point, intersection de ces trois plans* (*).

Démonstration. Si en effet on joint chaque sommet aux deux qui ne lui sont pas opposés par des droites, on aura ainsi douze droites que l'on pourra considé-

28. *THÉORÈME. Dans tout hexagone gauche, tel que ses côtés opposés concourent deux à deux en trois points; les droites que déterminent les plans des angles opposés sont toutes trois dans un même plan, déterminé par ces trois points* (*).

Démonstration. Si en effet on considère les intersections du plan de chaque angle avec les plans des deux angles qui ne lui sont pas opposés, on aura ainsi douze

(*) On reconnaît ici les deux théorèmes dont M. Dandelin a tiré un si heureux parti. (Tom. XV, pag. 393).

rer comme les douze arêtes d'un octaèdre hexagone du genre de ceux dont il a été question (21 et suivant). Or les droites déterminées par les sommets opposés de l'hexagone gauche ne seront autre que les droites déterminées par les sommets opposés de l'octaèdre ; d'où il résulte que ces trois droites passeront par un même point.

droites que l'on pourra considérer comme les douze arêtes d'un hexaèdre octogone du genre de ceux dont il a été question (21 et suivant). Or les droites déterminées par les plans des angles opposés de l'hexagone gauche ne seront autres que les droites déterminées par les faces opposées de l'hexaèdre, d'où il suit que ces trois droites appartiendront à un même plan.

Remarques. On pourrait traiter ici de l'icosaèdre dodécagone et du dodécaèdre icosagone dans lesquels les droites que déterminent les sommets opposés passent par le même point, ou dans lesquels les droites déterminées par les plans des faces opposées appartiennent à un même plan. On pourrait traiter ensuite de l'inscription et de la circonscription du tétraèdre à lui-même, de celle de l'octaèdre hexagone à l'hexaèdre hexagone, et de celle de l'icosaèdre dodécagone au dodécaèdre icosagone. On pourrait enfin placer ici l'article sur les lois générales qui régissent les polyèdres, rappelé au commencement du présent mémoire, ainsi qu'une grande partie de l'article de la page 321 du tome IX.*

Quelques personnes trouveront peut-être que ce qui précède manque de développement ; mais nous les prierons de remarquer que nous n'écrivons pas pour les commençans, et qu'il nous a dû sembler préférable de multiplier les points de comparaison que d'entrer sur quelques-uns d'entre eux dans de minutieux détails que tout lecteur tant soit peu versé dans la géométrie pourra facilement suppléer. Nous croyons en avoir dit suffisamment pour mettre hors de toute contestation ces deux points de philosophie mathématique, savoir 1.° qu'il est une partie assez notable de la géométrie dans laquelle les théorèmes se correspondent exactement

deux à deux, ainsi que les raisonnemens qu'il faut faire pour les établir, et cela en vertu de la nature même de l'étendue; 2.° que cette partie de la géométrie, qui prendrait une très-grande étendue, si l'on voulait y comprendre les lignes et les surfaces courbes (*), peut être complètement développée indépendamment du calcul et de la connaissance d'aucune des propriétés métriques des grandeurs que l'on considère.

Il nous a paru qu'un point de doctrine d'une importance aussi majeure, dont nous avons été frappés pour la première fois il y a plus de dix ans, et que l'esprit de détail avait dérobé jusqu'ici à la vue des géomètres, ne devait pas demeurer plus long-temps sans être mis en pleine évidence. Nous craignons bien toutefois que ce que nous venons d'écrire passe sans être aperçu ou que du moins d'après un examen superficiel, beaucoup n'y voient qu'un de ces rapprochemens forcés qui n'ont de consistance que dans l'esprit de ceux qui les imaginent.

(*) Voici de quelle manière on pourrait débuter dans la partie de cette géométrie relative aux lignes et surfaces courbes.

Définition. Soient dans l'espace, un plan fixe et trois droites, non situées deux à deux dans un même plan; et concevons une droite mobile posant constamment sur les trois droites fixes. Cette droite mobile et le plan fixe détermineront une série de points; et la courbe plane qui les comprendra tous sera ce qu'on appelle une *ligne du second ordre.*

THÉOREME. Toute surface conique qui passe par une ligne du second ordre est une surface conique du second ordre.

Démonstration. Etc., etc.

Définition. Soient, dans l'espace, un point fixe et trois droites fixes, non concourant deux à deux en un même point; et concevons une droite mobile posant constamment sur les trois droites fixes. Cette droite mobile et le point fixe détermineront une série de plans, et la surface conique à laquelle ils seront tous tangens sera ce qu'on appelle une *surface conique du second ordre.*

THÉOREME. Toute section plane faite à une surface conique du second ordre est une ligne du second ordre.

Démonstration. Etc., etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie.

Deux quadrilatères quelconques étant donnés, il existe un angle tétraèdre auquel ces deux quadrilatères sont l'un et l'autre inscriptibles.

Deux angles tétraèdres quelconques étant donnés, il existe un quadrilatère auquel ces deux angles tétraèdres sont l'un et l'autre circonscriptibles.

Problèmes de géométrie.

On a construit sur les deux faces d'un angle dièdre deux triangles tels que les points que déterminent leurs côtés correspondans sont tous trois sur l'arête de l'angle dièdre, et conséquemment en ligne droite, d'où il résulte que, quelle que soit l'ouverture de l'angle dièdre, toujours les droites que détermineront les sommets correspondans des deux triangles passeront par un même point. On suppose que l'on fait varier cette ouverture, et on demande quelle ligne ce point décrira dans l'espace?

Deux angles trièdres sont tels que les plans que déterminent leurs arêtes correspondantes passent tous trois par la droite que déterminent leurs sommets, et se coupent conséquemment suivant une même droite; d'où il résulte que, quelle que soit la distance de leurs sommets, toujours les droites que détermineront les faces correspondantes des deux angles trièdres seront dans un même plan. On suppose que l'on fait varier cette distance, et l'on demande à quelle surface ce plan sera constamment tangent?

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Lettre au Rédacteur des ANNALES, *Sur la théorie des parallèles*,

Par M. SERVOIS, conservateur du Muséum d'Artillerie.

DES insomnies, mon bien excellent ami, compagnes et suite de fluxions combinées, croisées, enchevêtrées, etc., m'ont procuré des rêves ; or les rêves d'un géomètre roulent sur la géométrie, et ceux d'un vieillard remontent vers l'A, B, C ; ainsi attendez-vous à lire des rêves sur *les parallèles*.

Premier rêve. M. Legendre (XIIe édition de sa Géométrie) enseigne à construire un triangle tel que la somme de ses trois angles soit égale à celle des trois angles d'un triangle donné ABC (fig 1) et dans lequel, en outre, la somme de deux des angles soit plus petite qu'un angle donné.

Soit en effet B le plus grand des trois angles du triangle donné ; soit M le milieu de l'un quelconque BC des deux côtés adjacens, et soit menée la droite AM. Soit menée la droite A_1C_1, double de AM, et ayant son milieu en N. Par ce point N, soit menée une droite NB_1 égale à MB=MC, et faisant avec A_1C_1 deux angles B_1NA_1 et B_1NC_1, respectivement égaux aux deux angles AMC et AMB. Alors, en tirant B_1A_1 et B_1C_1 on obtiendra deux triangles B_1NA_1 et B_1NC_1, respectivement égaux aux deux triangles CMA et BMA ; d'où il suit évidemment que la somme des trois angles

du triangle total $A_1B_1C_1$ sera la même que celle des trois angles du triangle ABC. De plus, dans le triangle $A_1B_1C_1$, le côté $B_1A_1 = AC$ sera plus grand que le côté $B_1C_1 = BA$; d'où il suit que l'angle A_1 sera plus petit que l'angle C_1 ; or, comme on a d'ailleurs, par suite de la construction, $A_1 + C_1 = A$, il s'ensuit qu'on aura $A_1 < \frac{1}{2}A$. Enfin, puisque B_1 est plus grand que B, cet angle B_1 sera le plus grand des trois angles du nouveau triangle.

Par une semblable construction, on transformera le triangle $A_1B_1C_1$ en un autre $A_2B_2C_2$, dont la somme des angles sera encore la même, et dans lequel on aura $A_2 < \frac{1}{2}A_1$, et, par suite, $A_2 < \frac{1}{4}A$. En poursuivant donc ainsi, on pourra parvenir à un triangle $A_nB_nC_n$ où l'on aura $A_n < \frac{1}{2^n}A$, et par suite $A_n < \delta$, en désignant par δ un angle aussi petit qu'on voudra. Faisant alors une transformation de plus, on parviendra à un dernier triangle *abc*, dans lequel on aura $a + c = A_n$, et par suite $a + c < \delta$.

M. Legendre a fort bien démontré, avec son ruban, (voyez les éditions antérieures de sa Géométrie), que la somme $A + B + C$ des trois angles d'un triangle ne pouvait excéder deux angles droits; mais, comme il n'est pas encore démontré que cette somme ne peut être moindre, on est obligé de supposer, en désignant par D l'angle droit, $A + B + C = 2D - \delta$, l'angle δ étant inconnu. Or je vais démontrer que, pourvu qu'on admette que la somme des trois angles de tout triangle est plus grande qu'un droit, ou que $A + B + C = D + \theta$, cet angle δ doit être nul.

En effet, transformons ABC (fig. 1) en *abc* (fig. 2), de manière qu'on ait $a + c < \theta$; alors on aura $b > D$. Construisons, sur *ab* triangle *abk*, équilatéral avec *abc* ; l'angle *kbc*, supplément à quatre droites du double de *b*, sera $< 2D$. Tirons *ck* et nous aurons un nouveau triangle *ack* dont la somme *S* des angles sera égale, moins quatre droites, à la somme des angles réunis des trois triangles *abc*, *abk*, *bck* ; c'est-à-dire qu'on aura, en représentant

par $2D-\delta'$ la somme des angles du triangle *cbk*, $S=2(2D-\delta)+(2D-\delta')-4D$, ou bien $S=2D-2\delta-\delta'$; ou enfin, plus simplement $S<2D-2\delta$.

Transformons pareillement *ack* en $a_1c_1k_1$; ici on aura $S_1=2(2D-2\delta-\delta')+(2D-\delta'')-4D$; ou simplement $S_1<2D-4\delta$. En continuant ainsi, on aura, après n transformations, $S_n<2D-2^n\delta$. Or, quelque petit que soit l'angle δ, *s'il n'est pas nul*, $2^n\delta$ pourra égaler ou surpasser D; d'où il résultera, contrairement à l'hypothèse $S<D$.

Ainsi le théorème pythagoricien, concernant la somme des angles du triangle, serait complètement démontré, si l'on parvenait à démontrer celui-ci : « il n'y a pas de triangle dans lequel la » somme des angles soit égale ou inférieure à un angle droit ».

Un de vos docteurs (si ma mémoire ne faut) a proposé jadis, pour faciliter la cure des maladies, de les transformer : de faire en sorte, par exemple, qu'une affection chronique irrégulière devienne régulièrement intermittente. Je désirerais fort que la nouvelle forme que prend ici la maladie *les parallèles* se prêtât à un traitement qui pût être couronné d'un heureux succès. Quoi qu'il en puisse advenir, en elle même et comme fait, la transformation dont il s'agit me paraît curieuse.

Autre rêve. Soit le triangle ABC (fig. 3), rectangle en B. Elevons CE, perpendiculaire à BC en C. Par un point quelconque *b*, entre B et C, élevons une autre perpendiculaire *be*, sur la même droite BC, cette droite étant parallèle au côté BA coupera nécessairement le côté AC en quelque point *a*. Dans le quadrilatère convexe *ab*BA, qui a deux angles droits en B et *b*, on aura la somme B*Aa*+A*ab* des deux autres angles inférieurs ou tout au plus égale à $2D$; car de ce que la somme des angles d'un triangle ne saurait être $>2D$, il suit que celle d'un quadrilatère convexe ne saurait être $>4D$. D'un autre côté, $2D=\mathrm{A}ab+bac$;

donc la somme $BAa + Aab$ doit être inférieure ou tout au plus égale à $Aab + baC$, ou, en réduisant $BAa \leqq baC$.

Si, entre b et C, on élève une autre perpendiculaire $b'e'$, coupant AC en a' on aura de même $baa' \leqq b'a'C$. Ainsi, en imaginant qu'une droite, constamment perpendiculaire à BC, parte de la position BA, pour parvenir à une dernière position CE; cette droite ne cessera de couper AC, en faisant avec elle des angles baC $b'a'C$, ... qui croîtront continuellement, à moins qu'ils ne s'avisent de rester égaux pendant quelque temps.

Admettons pour un moment cette hypothèse, et soit $baC = b'a'C$. Par le milieu o de aa', j'abaisse sur $b'e'$ la perpendiculaire ok qui prolongée ira couper be en l. A cause de l'égalité des triangles $oa'k$ et oal, ol sera aussi perpendiculaire sur be Ainsi, dans cette hypothèse, on aurait un quadrilatère $blkb'$ dont les quatre angles seraient tous droits, résultat qui donnerait, sur-le-champ, comme on sait, la démonstration du théorème pythagoricien. Il faut donc, si l'on veut prolonger la discussion, supposer que les angles baC, $b'a'C$, ... ou, ce qui est la même chose, leurs opposés au sommet Aae, $Aa'e'$, ... croissent sans interruption vers une limite qui est l'angle ACE. On ne dira pas qu'au lieu de ACE il faut prendre pour limite un angle moindre $ACE - \theta$; car par C soit menée Cp, faisant avec CE un angle θ, notre droite mobile, dans sa dernière position, serait à la fois sur CE et sur CpE; c'est-à-dire qu'il y aurait deux chemins distincts et les plus courts entre C et E; ce qui est absurde. Ceci est un lemme pour ce qui suit.

Soit un triangle acutangle, non équilatéral ABC (fig. 4). Sur AB, je construis ABK, équilatéral avec ABC, et je tire CK, coupant AB en P. Soient S, S', S'' les sommes d'angles des triangles ABC, ACK, BCK, respectivement. On aura $2S = S' + S''$. Or les sommes S', S'' sont inégales ou égales. Dans le premier cas, soit $S' < S''$, on aura donc aussi $S' < S$. Comme CK est per-

pendiculaire sur AB en P ; à partir de CK, je fais mouvoir perpendiculairement à AB, en allant vers A, une droite qui, d'après le précédent lemme, fera constamment avec AC et AK des angles de plus en plus grands. Soit EF une de ses positions, coupant AB en O. Si $AEF - ACK = \frac{S - S'}{2}$, on aura S pour la somme des angles du triangle AEF ; car, soit Z cette somme, on a $Z = A + 2AEF$ et $S' = A + 2ACK$, d'où $2(AEF - ACK) = Z - S'$, équation qui donne $Z = S$, quand on fait $ADF - ACK = \frac{S - S'}{2}$. Or les sommes d'angles des triangles AEF, entre C et A, peuvent devenir assez grandes pour admettre l'hypothèse d'un triangle intermédiaire ayant la somme de ses angles égale à S. En effet, comme on l'a prouvé, la limite des accroissemens de sommes d'angles pour AEF est $D - \frac{1}{2}A$ ou $\frac{2D - A}{2}$; D désignant toujours l'angle droit ; donc, la limite des accroissemens de AEF—ACK sera $\frac{2D - A}{2} - \frac{S' - A}{2}$ ou $\frac{2D - S'}{2}$; quantité toujours plus grande que $\frac{S - S'}{2}$, puisque S est supposé $< 2D$.

Cela étant ; je prend sur AB une longueur $OH = OA$, je joins HF ; et le triangle AHF aura S pour sommes d'angles ; attendu qu'il a même somme d'angles que le triangle AEF. Je joins KH. Alors, désignant par $2D - \delta$, $2D - \delta'$ les sommes d'angles respectives des triangles BKH et FHK, j'aurai visiblement

$$S + (2D - \delta) + (2D - \delta') - 2D - 2D = S\ ;$$

d'où résulte $\delta + \delta' = 0$; ou bien $\delta = \delta' = 0$, parce que δ et δ' sont essentiellement de mêmes signes. Donc j'aurai deux triangles BKH, KHF, qui ont l'un et l'autre une somme d'angles égale à $2D$. Or, on sait qu'il suffit d'avoir un seul triangle de cette espèce pour démontrer complètement le théorème pythagoricien.

Dans le deuxième cas ; c'est-à-dire, si $S'=S''=S$, il est visible qu'alors les triangles rectangles BPC et APC auraient même somme d'angles T. Je prends PN=PB, pour avoir le triangle CPN égal à CPB. Ainsi, désignant par $2D-\delta$ la somme des angles du triangle ACN, j'aurai $T+(2D-\delta)-2D=T$, d'ou $\delta=0$; et partant, voilà encore un triangle ACN qui a $2D$ pour la somme de ses angles. Considérez tout ceci, au surplus, *velut ægri somnia.*

Paris, le 15 novembre 1825.

OPTIQUE.

Recherches d'analise sur les caustiques planes.

Par M. Ch. Sturm.

M. Gergonne, par ses derniers travaux sur l'optique analitique, en a porté les principes au plus haut degré de simplicité et d'élégance qu'ils puissent atteindre. Il a montré, en particulier, par divers exemples, avec quelle facilité la théorie générale qu'il a établie conduit à tous les résultats déjà connus. Cette nouvelle théorie, purement analitique, devant suffire pour rendre compte de tous les phénomènes que la réflexion et la réfraction ordinaire peuvent offrir, il m'a paru à propos d'y rattacher quelques propriétés générales des caustiques planes qui ont beaucoup occupé les premiers investigateurs de ces sortes de courbes propriétés qui n'ont encore été démontrées jusqu'ici que par la méthode mixte et imparfaite

des infiniment petits, et qui méritent d'être reproduites et généralisées dans le langage qui convient à l'état actuel de la science. Je me propose, entre autres choses, de faire voir que toute caustique, pouvant toujours être considérée comme une développée, est conséquemment rectifiable. Sous le point de vue de l'utilité physique, cette propriété des caustiques n'est pas sans quelque importance, en ce qu'elle peut donner la mesure de l'intensité de la lumière aux différens points de ces sortes de courbes. On conçoit, en effet, que les arcs de caustiques qui reçoivent une égale quantité de rayons lumineux sont d'autant moins éclairés qu'ils ont plus de longueur. Mais, avant d'exposer les formules relatives à cette rectification, je donnerai d'abord celles qui établissent une relation entre les longueurs des rayons incidens et réfractés correspondans, prises, l'une et l'autre, depuis le point d'incidence jusqu'à ceux où ces rayons touchent leurs caustiques respectives. Ces élégantes formules, dont la recherche première paraît due à Jean Bernouilli, renferment implicitement celles qui servent à déterminer les foyers des miroirs et lentilles de toute espèce; elles offrent en outre, le plus souvent, le seul moyen praticable pour construire par points les caustiques dont on s'occupe, et pour parvenir ainsi à une connaissance exacte ou approchée de la figure de ces sortes de courbes; comme on peut le voir par plusieurs exemples consignés dans l'*Analise des infiniment petits* du Marquis de l'Hôpital, et par un mémoire de Petit, inséré dans le IIe volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique*.

Pour parvenir au but que j'ai en vue, je dois d'abord rappeler sommairement la théorie des caustiques planes de M. Gergonne. Cette théorie se réduit simplement à ce que, *à chaque trajectoire orthogonale des rayons incidens, il répond toujours une trajectoire orthogonale des rayons réfractés, telle que, de quelque point de la courbe séparatrice des deux milieux que l'on mène des normales aux deux trajectoires, les longueurs de ces normales seront*

respectivement entre elles dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction

On conclut de là immédiatement que (X,Y) étant le point d'incidence, (x,y), (x',y') les pieds des normales abaissées de ce point sur les deux trajectoires, et le rapport constant de λ à λ' celui de leurs longueurs; en posant

$$\mathrm{d}Y=P\mathrm{d}X\ , \qquad \mathrm{d}y=p\mathrm{d}x\ , \qquad \mathrm{d}y'=p'\mathrm{d}x'\ ;$$

on aura les quatre équations

$$\frac{(X-x)^2+(Y-y)^2}{\lambda^2}=\frac{(X-x')^2+(Y-y')^2}{\lambda'^2}\ , \qquad (1)$$

$$(X-x)+p(Y-y)=0\ , \quad (2) \qquad (X-x')+p'(Y-y')=0\ , \quad (2')$$

$$\frac{(Y-x)+P(Y-y)}{\lambda^2}=\frac{(X-x')+P(Y-y')}{\lambda'^2}\ ; \quad (3) \qquad (*)$$

dont la dernière est comportée par les trois autres.

Puisque ces équations n'équivalent qu'à trois seulement, et que d'ailleurs chacune des trois courbes se trouve déterminée par les deux autres, il s'ensuit que, des six variables X, Y, x, y, x', y', une seule doit être regardée comme indépendante. Prenons X pour telle, et posons

$$\mathrm{d}P=Q\mathrm{d}X\ , \qquad \mathrm{d}p=q\mathrm{d}x\ , \qquad \mathrm{d}p'=q'\mathrm{d}x'\ ,$$

nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}X}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X}=p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X}\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}X}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\cdot\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}X}=p'\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}X}\ ;$$

(*) Voy. la page 66 du présent volume.

Différentiant alors les trois dernières équations sous ce point de vue, en ayant égard à ces relations, il viendra

$$1+pP-[(1+p^2)-q(Y-y)]\frac{dx}{dX}=0\ ,$$

$$1+p'P-[(1+p'^2)-q'(Y-y')]\frac{dx'}{dX}=0\ ,$$

$$\frac{(1+P^2)+Q(Y-y)-(1+pP)\frac{dx}{dX}}{\lambda^2}=\frac{(1+P^2)+Q(Y-y')-(1+p'P)\frac{dx'}{dX}}{\lambda'^2}\ .$$

mettant ensuite dans la dernière les valeurs de $\frac{dx}{dX}$ et $\frac{dx'}{dX}$, tirées des deux qui la précèdent, on aura

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(1+P^2)+Q(Y-y)-\frac{(1+pP)^2}{(1+p^2)-q(Y-y)}}{\lambda^2}\\ =&\frac{(1+P^2)+Q(Y-y')-\frac{(1+p'P)^2}{(1+p'^2)-q'(Y-y')}}{\lambda'^2}\ ,\end{aligned}\right\}(4)$$

Cela posé, les axes des coordonnées n'étant simplement assujettis qu'à être rectangulaires, et pouvant d'ailleurs avoir, sur le plan des trois courbes, une situation quelconque ; il nous est permis de supposer, pour simplifier un peu ce résultat, qu'on a pris pour origine le point d'incidence (X, Y), en dirigeant les axes des x et des y, respectivement suivant la tangente et la normale à la courbe séparatrice en ce point. On aura ainsi $Y=0$, $P=0$; et si, en outre, on désigne par R le rayon de courbure de cette séparatrice en ce point, on aura $Q=-\frac{1}{R}$; au moyen de quoi l'équation (4) deviendra simplement

$$\frac{1+\frac{y}{H}-\frac{1}{(1+p^2)+qy}}{\lambda^2}=\frac{1+\frac{y'}{H}-\frac{1}{(1+p'^2)+q'y'}}{\lambda'^2}. \quad (5)$$

Désignons par (S) la courbe séparatrice, par (T), (T′) les deux trajectoires, par (C), (C′) leurs développées respectives, lesquelles ne sont autre chose que les caustiques formées par les rayons incidens et réfractés. Soient λk, $\lambda' k$ les longueurs des normales abaissées respectivement sur les deux trajectoires (T), (T′); soient (t), (t') les points où ces normales touchent les caustiques (C), (C′); et soient d, d' les distances de l'origine à ces deux points; soient enfin r, r' les rayons de courbure des deux trajectoires, pour les points (x, y), (x', y').

Prenons pour angle des coordonnées positives celui dans lequel se trouve situé le point (t) de la caustique (C); et remarquons que le rapport de λ à λ' pouvant toujours être supposé aussi voisin de l'égalité qu'on voudra, il s'ensuit que la caustique (C′) peut être supposée indéfiniment voisine de la caustique (C), sans pourtant se confondre avec elle; auquel cas le point (t') se trouvera très-voisin de (t) et situé, comme lui, dans l'angle des coordonnées positives.

Remarquons présentement que, les deux trajectoires (T), (T′) étant liées entre elles, mais d'ailleurs arbitraires, l'une et l'autre, on peut toujours faire passer l'une d'elles par un point donné, pris comme on voudra. On peut donc supposer le point (x, y) de (T) situé entre le point (t) et l'origine, et si près de ce dernier point qu'on voudra; et alors, à raison de la presque égalité des deux nombres λ et λ', le point (x', y') se trouvera également situé entre le point (t') et l'origine.

En conséquence ou aura

$$d=r+\lambda k, \quad (6) \qquad d'=r'+\lambda' k, \quad (6')$$

$$y=\lambda k\text{Cos.}(R,d)\,, \qquad (7) \qquad y'=\lambda' k\text{Cos.}(R,d')\,, \qquad (7')$$

$$p=-\text{Tang.}(R,d)\,, \qquad (8) \qquad p'=-\text{Tang.}(R,d')\,, \qquad (8')$$

$$r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\,, \qquad (9) \qquad r'=\frac{(1+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{q'}\,. \qquad (9')$$

Des quatre équations $(8, 9, 8', 9')$ on tirera

$$1+p^2=\frac{1}{\text{Cos.}^2(R,d)}\,, \qquad 1+p'^2=\frac{1}{\text{Cos.}^2(R.d')}\,.$$

$$q=-\frac{1}{r\text{Cos.}^3(R,d)}\,, \qquad q'=-\frac{1}{r'\text{Cos.}^3(R,d')}\,;$$

d'où on conclura, à l'aide des équations $(7, 7')$

$$qy=-\frac{\lambda k}{r\text{Cos.}^2(R,d)}\,, \qquad q'y'=-\frac{\lambda' k}{r'\text{Cos.}^2(R,d')}\,;$$

et par conséquent

$$(1+p^2)+qy=\frac{r+\lambda k}{r\text{Cos.}^2(R,d)}\,; \qquad (1+p'^2)+q'y'=\frac{r'+\lambda' k}{r'\text{Cos.}^2(R,d')}\,;$$

ou, en vertu des équations $(6, 6')$

$$(1+p^2)+qy=\frac{d}{r\text{Cos.}^2(R,d)}\,, \qquad (1+p'^2)+q'y'=\frac{d'}{r'\text{Cos.}^2(R,d')}\,.$$

Substituant toutes ces diverses valeurs dans l'équation (5) elle deviendra

$$\frac{1+\frac{\lambda k \text{Cos.}(R,d)}{R}-\frac{r\text{Cos.}^2(R,d)}{d}}{\lambda^2}=\frac{1+\frac{\lambda' k \text{Cos.}(R,d')}{R}-\frac{r'\text{Cos.}^2(R,d')}{d'}}{\lambda'^2};$$

mais (6, 6′)

$$\frac{r\text{Cos.}^2(R,d)}{d}=\frac{(d-\lambda k)\text{Cos.}^2(R,d)}{d}=\text{Cos.}^2(R,d)-\frac{\lambda k\text{Cos.}^2(R,d)}{d},$$

$$\frac{r'\text{Cos.}^2(R,d')}{d'}=\frac{(d'-\lambda' k)\text{Cos.}^2(R,d')}{d'}=\text{Cos.}^2(R,d')-\frac{\lambda' k\text{Cos.}^2(R,d')}{d'};$$

donc, en substituant, et remplaçant $1-\text{Cos.}^2(R,d)$ et $1-\text{Cos.}^2(R,d')$ par $\text{Sin.}^2(R,d)$ et $\text{Sin.}^2(R,d')$

$$\frac{\text{Sin.}^2(R,d)}{\lambda^2}+\frac{k}{\lambda}\left\{\frac{\text{Cos.}(R,d)}{R}+\frac{\text{Cos.}^2(R,d)}{d}\right\}$$

$$=\frac{\text{Sin.}^2(R,d')}{\lambda'^2}+\frac{k}{\lambda'}\left\{\frac{\text{Cos.}(R,d')}{R}+\frac{\text{Cos.}^2(R,d')}{d'}\right\},$$

mais on a

$$\frac{\text{Sin.}^2(R,d)}{\lambda^2}=\frac{\text{Sin.}^2(R,d')}{\lambda'^2}$$

donc finalement

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\text{Cos.}(R,d)}{R}+\frac{\text{Cos.}^2(R,d)}{d}\right\}=\frac{1}{\lambda'}\left\{\frac{\text{Cos.}(R,d')}{R}+\frac{\text{Cos.}^2(R,d')}{d'}\right\}.$$

Ainsi étant donné le rapport de λ à λ' qui est celui du sinus d'incidence au sinus de réfraction, la caustique des rayons incidens et la courbe séparatrice, et par suite le rayon de courbure

R de cette dernière en chacun de ses points (*) ; on pourra, à l'aide de cette dernière équation, déterminer tant de points qu'on voudra de la caustique des rayons réfractés.

Si la ligne séparatrice était une ligne droite, on aurait $R=\infty$, et l'équation deviendrait simplement

$$\frac{\text{Cos.}^2(R,d)}{\lambda d}=\frac{\text{Cos.}^2(R,d')}{\lambda' d'},$$

d'où l'on voit qu'alors d et d' devraient constamment être de même signe. Dans tous les autres cas, il faudra se rappeler que la formule générale suppose que les points (t), (t') sont tous deux situés dans la concavité de la séparatrice, et varier conséquemment les signes de d et d' suivant la situation des points que l'on considérera sur l'une et sur l'autre caustiques.

Pour passer de là au cas de la réflexion, il suffira de supposer $\lambda'=-\lambda$, Ang. R,d') $=$Ang.(R,d) et de changer les signes de d et d'. Il viendra ainsi

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{2}{R\text{Cos.}(R,d)}=\frac{2}{R\text{Cos.}(R,d')};$$

cependant d et d' devront avoir des signes contraires, si les points de contact (t), (t') tombent de différens côtés de la courbe réfléchissante.

Revenons au cas de la réfraction. Considérons un rayon incident et le rayon réfracté correspondant, différens de ceux que nous avons considérés plus haut, et pour lesquels nous désignerons par d_1, r_1, d'_1, r'_1, k_1, les longueurs analogues à celles que nous

(*) Voy. sur ce sujet la pag. 361 du Tom. XI.

J. D. G.

avions désignées par d, r, d', r', k pour les premiers ; nous aurons, comme alors,

$$d=r+\lambda k\,, \qquad d'=r'+\lambda' k\,,$$

$$d_1=r_1+\lambda k_1\,, \qquad d'_1=r'_1+\lambda' k_1\,;$$

d'où en retranchant

$$d_1-d=r_1-r+\lambda(k_1-k)\,, \quad d_1'-d'=r_1'-r'+\lambda'(k_1-k)\,;$$

puis en éliminant k_1-k,

$$\frac{d_1-d-(r_1-r)}{\lambda}=\frac{d'_1-d'-(r'_1-r')}{\lambda'}\,;$$

mais, en représentant par s et s', respectivement les longueurs des arcs de chaque caustique compris entre les points de contact des deux rayons, et en supposant que les rayons de courbure vont croissant, on a

$$r_1-r=s\,, \qquad r'_1-r'=s'\,;$$

on aura donc, en substituant

$$\frac{d_1-d+s}{\lambda}=\frac{d'_1-d'+s'}{\lambda'}\,;$$

c'est-à-dire qu'en général la différence des longueurs de deux rayons incidens, mesurées depuis leur caustique jusqu'à la courbe séparatrice, augmentée de l'arc de cette caustique compris entre eux, est à la différence des longueurs des rayons réfractés correspondans, mesurées également depuis leur caustique jusqu'à la courbe séparatrice, augmentée de l'arc de cette caustique compris entre eux, dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction. Nous disons en général, parce que le théorème se trouverait en défaut si, sur l'une ou sur l'autre caustique ou sur toutes les

deux il se trouvait un point de rebroussement entre les points de contact des deux rayons.

Si donc on suppose que la caustique des rayons incidens soit rectifiable et que la courbe séparatrice soit algébrique, la caustique des rayons réfractés sera également algébrique et rectifiable.

Dans l'application de ce théorème, comme dans celle de celui que nous avons démontré en premier lieu, il faudra avoir égard aux signes de d et d', et il aura, comme celui-là, son analogue pour la réflexion.

On déduit de tout cela, en particulier, que, si des rayons incidens parallèles ou émanés d'un même point et compris dans un même plan subissent une suite de réflexions et de réfractions, à la rencontre de courbes algébriques quelconques, situées dans ce plan, les caustiques auxquelles ils donneront naissance, depuis la première jusqu'à la dernière seront toutes algébriques et rectifiables. Il en sera donc de même, dans l'espace, pour les surfaces caustiques engendrées par des rayons qui se réflechiront et se réfracteront successivement, à la rencontre d'une suite de surfaces algébriques de révolution ayant un axe commun; pourvu que les rayons primitifs émanent tous de l'un des points de cet axe ou soient tous parallèles à sa direction.

OPTIQUE.

Formules d'optique à trois dimensions;

Par M. Gergonne.



Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de construire, pour la résolution des problèmes d'optique qui embrassent inévitablement

les trois dimensions de l'espace, des formules analogues à celles que nous avons construites à la page 65 du présent volume, pour la résolution des problèmes d'optique plane. Nous montrerons ensuite, par un exemple, la manière d'en faire usage.

Le théorème fondamental consiste ici en ce que, *à chaque surface trajectoire orthogonale des rayons incidens, il répond toujours une surface trajectoire orthogonale des rayons réfractés telle que, de quelque point de la surface séparatrice des deux milieux que l'on mène des normales à ces deux autres surfaces, les longueurs de ces normales seront respectivement entre elles dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction.*

Soient donc (t,u,v) un quelconque des points de la surface séparatrice, (x',y',z') et (x,y,z) les pieds des normales abaissées de ce point sur les deux surfaces trajectoires; et supposons que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction soit celui de λ' à λ; on aura d'abord

$$\frac{(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2}{\lambda^2}=\frac{(t-x')^2+(u-y')^2+(v-z')^2}{\lambda'^2}. \quad (1)$$

De plus, parce que les droites menées du point (t,u,v) aux deux autres sont respectivement normales aux surfaces auxquelles elles se terminent, en posant

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \frac{dz}{dy}=q, \qquad \frac{dz'}{dx'}=p', \quad \frac{dz'}{dy'}=q',$$

on aura aussi

$$(t-x)+p(v-z)=0, \quad (2) \qquad (t-x')+p'(v-z')=0, \quad (2')$$

$$(u-y)+q(v-z)=0, \quad (3) \qquad (u-y')+q'(v-z')=0. \quad (3')$$

Remarquons présentement qu'il n'y a proprement dans tout ceci que t et u de variables indépendantes, et qu'on a

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dt}=p\,\frac{dx}{dt}+q\,\frac{dy}{dt}\ ,$$

$$\frac{dz}{du}=\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{du}+\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{du}=p\,\frac{dx}{du}+q\,\frac{dy}{du}\ ,$$

$$\frac{dz'}{dt}=\frac{dz'}{dx'}\,\frac{dx'}{dt}+\frac{dz'}{dy'}\,\frac{dy'}{dt}=p'\,\frac{dx'}{dt}+q'\,\frac{dy'}{dt}\ ,$$

$$\frac{dz'}{du}=\frac{dz'}{dx'}\,\frac{dx'}{du}+\frac{dx'}{dy'}\,\frac{dy'}{du}=p'\,\frac{dx'}{du}+q'\,\frac{dy'}{du}\ ,$$

en prenant donc, sous ce point de vue, les deux différentielles partielles de l'équation (1), par rapport à t et u, on trouvera

$$\frac{(t-x)\left(1-\frac{dx}{dt}\right)-(u-y)\,\frac{dy}{dt}+(v-z)\left(\frac{dv}{dt}-p\,\frac{dx}{dt}-q\,\frac{dy}{dt}\right)}{\lambda^2}$$

$$=\frac{(t-x')\left(1-\frac{dx'}{dt}\right)-(u-y')\,\frac{dy'}{dt}+(v-z')\left(\frac{dv}{dt}-p'\,\frac{dx'}{dt}-q'\,\frac{dy'}{dt}\right)}{\lambda'^2},$$

$$\frac{-(t-x)\,\frac{dx}{du}+(u-y)\left(1-\frac{dy}{du}\right)+(v-z)\left(\frac{dv}{du}-p\,\frac{dx}{du}-q\,\frac{dy}{du}\right)}{\lambda^2}$$

$$=\frac{-(t-x')\,\frac{dx'}{du}+(u-y')\left(1-\frac{dy'}{du}\right)+(v-z')\left(\frac{dv}{du}-p'\,\frac{dx'}{du}-q'\,\frac{dy'}{du}\right)}{\lambda'^2};$$

ou encore

$$\frac{(t-x)+(v-z)\,\frac{dv}{dt}-[(t-x)+p(v-z)]\,\frac{dx}{dt}-[(u-y)+q(v-z)]\,\frac{dy}{dt}}{\lambda^2}$$

$$=\frac{(t-x')+(v-z')\frac{dv}{dt}-[(t-x')+p'(v-z')]\frac{dx'}{dt}-[(u-y')+q'(v-z')]\frac{dy'}{dt}}{\lambda'^2};$$

$$\frac{(u-y)+(v-z)\frac{dv}{du}-[(t-x)+p(v-z)]\frac{dx}{du}-[(u-y)+q(v-z)]\frac{dy}{du}}{\lambda^2}$$

$$=\frac{(u-y')+(v-z')\frac{dv}{du}-[(t-x')+p'(v-z')]\frac{dx'}{du}-[(u-y')+q'(v-z')]\frac{dy'}{du}}{\lambda'^2};$$

ou enfin, en ayant égard aux équations (2, 3, 2′, 3′)

$$\frac{(t-x)+(v-z)\frac{dv}{dt}}{\lambda^2}=\frac{(t-x')+(v-z')\frac{dv}{dt}}{\lambda'^2}; \qquad (4)$$

$$\frac{(u-y)+(v-z)\frac{dv}{du}}{\lambda^2}=\frac{(u-y')+(v-z')\frac{dv}{du}}{\lambda'^2}; \qquad (5)$$

équations évidemment comportées par les cinq autres, mais qu'on pourra substituer, avec avantage, à deux des quatre équations (2, 3, 2′, 3′), lorsque la surface séparatrice des deux milieux sera une des données du problème. On voit que, dans ce système d'équations, x', y', z', λ' figurent de la même manière que x, y, z, λ; et l'on n'aura pas lieu d'en être surpris, si l'on considère que, le rayon réfracté étant pris pour rayon incident, celui-ci devient rayon réfracté, et *vice versâ*. Il en résulte que la surface séparatrice des deux milieux étant donnée, le problème où l'on cherche la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens, à l'aide de celle des rayons réfractés n'est pas différent de celui où il s'agirait de déterminer cette dernière, l'autre étant donnée.

Enfin, les coordonnées de nos trois points doivent être liées par un nombre égal d'équations en t, u, v en x, y, z et en x', y', z', lesquelles ne sont autre chose que celles même de nos trois surfaces, équations que nous représenterons par

$$S=0\,, \qquad (6)$$

$$T=0\,, \quad (7) \qquad T'=0\,; \quad (7')$$

la première appartenant à la surface séparatrice, et les deux autres aux deux surfaces trajectoires.

Lorsque, cette surface séparatrice étant donnée, on demandera de déterminer l'une des deux surfaces trajectoire par l'autre, il ne s'agira, pour cela, que d'éliminer ou les six coordonnées t, u, v, x', y', z', entre les sept équations (1, 2', 3', 4, 5, 6, 7'), ou bien les six coordonnées t, u, v, x, y, z, entre les sept équations (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7); et l'équation résultante, en x, y, z ou en x', y', z', sera l'équation de la surface trajectoire cherchée.

Si, au contraire, il s'agit de déterminer la surface séparatrice, au moyen des deux surfaces trajectoires, on y parviendra en éliminant les six coordonnées x, y, z, x', y', z', entre les sept équations (1, 2, 2', 3, 3', 7, 7'); ce qui conduira à une équation en t, u, v, qui sera celle de la surface demandée.

Quant aux problèmes relatifs à la réflexion de la lumière, on les résoudra à l'aide des mêmes formules, en y posant préalablement $\lambda+\lambda'=0$.

Pour montrer, par un exemple, l'usage de ces formules, supposons que la surface séparatrice soit celle d'une sphère d'un rayon r, ayant son centre à l'origine, et que les rayons incidens partent tous d'un point (a, b, c); nous aurons d'abord les équations

$$x'=a\,, \qquad y'=b\,, \qquad z'=c\,,$$

qui remplaceront les équations (2′,3′,7′) et ensuite, pour l'équation (6)

$$t^2+u^2+v^2=r^2 ,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{t}{v} , \qquad \frac{dv}{du}=-\frac{u}{v} .$$

En mettant ces valeurs dans les équations (1,4,5), elles deviendront

$$\frac{(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2}{\lambda^2}=\frac{(t-a)^2+(u-b)^2+(v-c)^2}{\lambda'^2} ;$$

$$\frac{tz-vx}{\lambda^2}=\frac{ct-av}{\lambda'^2} , \qquad \frac{uz-vy}{\lambda^2}=\frac{cu-bv}{\lambda'^2} .$$

Les deux dernières, combinées avec l'équation de la sphère donneront

$$t=\frac{(\lambda'^2x-\lambda^2a)r}{\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2}} ,$$

$$u=\frac{(\lambda'^2y-\lambda^2b)r}{\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2}} ,$$

$$v=\frac{(\lambda'^2z-\lambda^2c)r}{\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2}} ,$$

d'où

$$(\lambda'^2x-\lambda^2a)t+(\lambda'^2y-\lambda^2b)u+(\lambda'^2z-\lambda^2c)v$$

$$=r\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2} ,$$

mais l'autre équation donne, en chassant les dénominateurs et développant ,

$$(\lambda'^2-\lambda^2)(t^2+u^2+v^2)-2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)t+(\lambda'^2y-\lambda^2b)u+(\lambda'^2z-\lambda^2c)v\}$$

$$+\lambda'^2(x^2+y^2+z^2)-\lambda^2(a^2+b^2+c^2)=0$$

ou simplement

$$2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)t+(\lambda'^2y-\lambda^2b)u+(\lambda'^2z-\lambda^2c)\}$$

$$=\lambda'^2(x^2+y^2+z^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+c^2+r^2)\ ;$$

on aura donc ainsi

$$\lambda'^2(x^2+y^2+z^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+c^2+r^2)$$

$$=2r\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2}\ ;$$

ou bien encore

$$4r^2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2\}$$

$$=\{\lambda'^2(x^2+y^2+z^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+c^2+r^2)\}^2\ ;$$

résultat qui se lie parfaitement avec celui que nous avons obtenu page 78.

Pour donner un exemple du cas où la surface séparatrice est inconnue, supposons que les rayons incidens partent tous de l'origine, et cherchons quelle doit être cette surface pour que les rayons réfractés concourent tous en un même point (a,b,c). Nous aurons ici

$$x'=0\ ,\quad y'=0\ ,\quad z'=0\ ,$$

$$x=a\ ,\quad y=b\ ,\quad z=c\ ;$$

valeurs qui substituées dans l'équation (1) la changeront en celle-ci

$$\frac{(t-a)^2+(u-b)^2+(v-c)^2}{\lambda^2}=\frac{t^2+u^2+v^2}{\lambda'^2};$$

c'est-à-dire,

$$(\lambda'^2-\lambda^2)(t^2+u^2+v^2)-2\lambda'^2(at+bu+cv)+\lambda'^2(a^2+b^2+c^2)=0$$

ou encore

$$\left\{t-\frac{\lambda'^2}{\lambda'^2-\lambda^2}a\right\}^2+\left\{u-\frac{\lambda'^2}{\lambda'^2-\lambda^2}b\right\}^2+\left\{v-\frac{\lambda'^2}{\lambda'^2-\lambda^2}c\right\}^2=\left\{\frac{\lambda'\lambda\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\lambda'^2-\lambda^2}\right\}^2;$$

équation d'une sphère, comme on pouvait bien s'y attendre.

TRIGONOMÉTRIE.

Note sur l'analise des sections angulaires;

Par un ABONNÉ.



SOIT posé, avec M. Poisson (*Bulletin universel* 1825, n.° 9, pag. 142),

$$X=\text{Cos.}mx+\frac{m}{1}\text{Cos.}(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos.}(m-4)x+\ldots\ldots,$$

$$X'=\text{Sin.}mx+\frac{m}{1}\text{Sin.}(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin.}(m-4)x+\ldots;$$

on aura comme l'on sait

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m = X + X'\sqrt{-1}\ , \quad \text{ou bien} \quad (2\mathrm{Cos}.x)^m = X - X'\sqrt{-1}\ ;$$

d'où il suit que le second membre de la première équation, en y changeant x en $x+2i\varpi$, devra être supposé identique avec le second membre de la seconde où on aurait changé x en $x+2i'\varpi$; i et i' étant deux nombres entiers, compris entre o et n, dénominateur de $m=\frac{p}{n}$, et ces nombres entiers étant accouplés d'une manière convenable. On voit en effet que, par l'effet de cette substitution, les premiers membres n'éprouvent aucun changement.

Mais alors

$$X+X'\sqrt{-1} \text{ se change en } (X+X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}.2mi\varpi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2mi\varpi)\ ,$$

$$X-X'\sqrt{-1} \text{ se change en } (X-X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}.2mi'\varpi-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2mi'\varpi)\ ,$$

donc, par un choix convenable des nombres i et i', on doit avoir

$$(X+X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}.2mi\varpi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2mi\varpi)=(X-X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}.2mi'\varpi-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2mi'\varpi)$$

qui se réduit à

$$(X+X'\sqrt{-1})\{\mathrm{Cos}.2m(i+i')\varpi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2m(i+i')\varpi\}=X-X'\sqrt{-1}\ .$$

En désignant par k soit la somme $i+i'$, si elle est moindre que n, soit le reste de la division de cette somme par n, si elle est plus grande; il viendra

$$(X+X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}\,2mk\varpi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.2mk\varpi)=X-X'\sqrt{-1}\ ;$$

ou, en développant et égalant séparément entre elles les parties réelles et les parties imaginaires

$$X(1-\mathrm{Cos}\,2mk\varpi)+X'\mathrm{Sin}\,2mk\varpi=0\ ,$$

$$X\text{Sin.}2mk\varpi+X'(1+\text{Cos.}2mk\varpi)=0 ,$$

ou encore

$$2X\text{Sin.}^2mk\varpi+2X'\text{Sin.}mk\varpi\text{Cos.}mk\varpi=0 ,$$

$$2X\text{Sin.}mk\varpi\text{Cos.}mk\varpi+2X'\text{Cos.}^2mk\varpi=0 ;$$

équations qui donnent également, en réduisant,

$$X\text{Sin.}mk\varpi+X'\text{Cos.}mk\varpi=0.$$

Cette relation très-simple permet d'éliminer, à volonté, de la valeur de $(2\text{Cos.}x)^m$ l'une quelconque des deux fonctions X et X'. Si, par exemple, on en veut éliminer la dernière, on aura

$$(2\text{Cos.}x)^m=X-X'\sqrt{-1}=X+X\frac{\text{Sin.}mk\varpi}{\text{Cos.}mk\varpi}\sqrt{-1} ,$$

c'est-à-dire,

$$(2\text{Cos.}x)^m=X\frac{\text{Cos}\,mk\varpi+\sqrt{-1}\text{Sin.}mk\varpi}{\text{Cos.}mk\varpi}=X\frac{(\text{Cos}\,k\varpi+\sqrt{-1}\text{Sin.}k\varpi)^m}{\text{Cos.}mk\varpi} ;$$

et on trouve aussi, d'après cela,

$$(2\text{Cos.}x)^m=-X'\frac{(\text{Cos.}k\varpi+\sqrt{-1}\text{Sin.}k\varpi)^m}{\text{Sin.}mk\varpi} .$$

Ces deux formules, qu'on peut regarder comme fondamentales, s'accordent avec celles de M. Poinsot, et se prêtent à tous les développemens qu'il a donnés à l'article de l'examen de l'analise d'Euler (*Recherches sur l'analise des sections angulaires*, pag. 68).

Les géomètres qui se sont occupés de ce sujet dans les *Annales* (*) se sont principalement attachés, pour la plupart, à produire

(*) M. Pagani Michel, tom. XIII, pag. 94, M. Crelle, même volume, pag. 213, et M. Stein, tom. XV, pag. 150.

au jour les n valeurs de la formule $X+X'\sqrt{-1}$; mais la transformation qui réduit l'expression à ne contenir que l'une ou l'autre des deux fonctions X et X' entrait bien aussi un peu dans la question, et pourtant aucun d'eux ne s'en est occupé. On peut être surpris qu'elle soit échappée, en particulier à M. Crelle, qui a traité ce sujet avec le plus de profondeur et de développement, et qui paraissait destiner ce qu'il avait écrit sur ce sujet à servir de commentaire à une traduction allemande du *Calcul des fonctions* qu'il préparait.

Ceci explique, entr'autres, pourquoi l'équation différentielle de Lagrange admet les deux solutions qui étaient pour M. Lacroix une source d'embarras (*Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, tom. III, pag. 616).

Du reste cette relation entre X et X' se trouve aux notations près, dans le mémoire de M. Poinsot; mais la manière dont elle s'y trouve amenée et les nombreux détails au milieu desquels elle se trouve absorbée permettent à peine de l'apercevoir.

CORRESPONDANCE.

Lettre sur divers sujets traités dans les Annales ;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au Gymnase de Trèves, ancien élève de l'Ecole polytechnique.



Monsieur,

Les observations que j'ai l'honneur de vous adresser arrivent un peu tard. La raison en est que mon libraire a négligé de renouveler

mon abonnement en temps opportun; de sorte que j'ai reçu à la fois, et depuis quelques jours seulement, les quatre premiers numéros du tome XVI. J'espère cependant que vous voudrez bien accorder à ma lettre une place dans vos *Annales*.

Je répondrai d'bord à l'objection que vous faites, Monsieur, à la page 47, contre le raisonnement que j'emploie pour démontrer qu'une bande indéfinie, entre parallèles peut égaler ou même surpasser une surface angulaire indéfinie.

Cette objection me paraît bien propre à jeter du jour sur le vrai sens de mon raisonnement, qui ne s'en trouve que plus rigoureusement confirmé. — En effet, en faisant simultanément partir deux mobiles d'un même point, vous mettez en dépendance mutuelle les temps pendant lesquels le mouvement a lieu, c'est-à-dire, que vous ne pouvez donner un temps déterminé à l'un des mobiles, sans l'accorder également à l'autre. Or on voit à l'instant que le rayon du secteur et la hauteur de la bande ne sont, dans mon raisonnement, que ce que sont les temps dans le vôtre. La grande différence consiste en ce que ces lignes sont absolument indépendantes, bien qu'on les suppose toutes deux infinies, tandis qu'un temps infini, donné au mobile qui se meut d'un monvement uniforme, entraîne un temps infini *égal* pour le mobile dont le mouvement est uniformément accéléré. — Si vous faisiez mouvoir les deux mobiles indépendamment l'un de l'autre, vous pourriez certainement obtenir un espace infini, parcouru uniformément égal ou plus grand qu'un espace infini parcouru d'un mouvement accéléré, puisqu'il suffirait pour cela de supposer que les temps fussent dans un rapport croissant à l'infini avec le temps même; et, dans ce cas, mon raisonnement s'applique sans conduire à aucune conséquence fausse; tandis qu'il ne s'applique pas plus au cas des deux mouvemens dont vous parlez qu'à celui où l'on supposerait un rapport constant entre la hauteur de la bande et le rayon du secteur. — Il résulte donc de tout cela que la vérité ou la faus-

seté des propositions sur les bandes et les surfaces angulaires dépendent essentiellement du rapport, tout-à-fait arbitraire, que l'on voudra établir entre les dimensions de ces figures.

Je vais maintenant, Monsieur, et suivant le vœu que vous avez paru manifester, exposer mon opinion sur la démonstration de M. Legendre, fondée sur l'algorithme des fonctions; en observant, toutefois, que je ne connais pas encore ce qui a été dit sur le même sujet à la page 161 du X.e volume des *Annales*. — D'abord, je ne sais, en vérité, quelle est cette loi des homogènes citée par M. Legendre qui du moins en aurait dû donner, avant tout, et l'énoncé et la démonstration (*). En attendant, voici comme j'entends la démonstration qui se trouve au commencement de la note II de ses élémens. — D'abord j'observe qu'il ne suffit pas de prendre une unité angulaire pour construire la formule $C=\varphi(A,B,c)$, mais qu'il faut adopter également une unité linéaire, pour représenter en nombre la longueur c; car ce ne sont que des *nombres* que l'on peut soumettre au calcul (comme M. Legendre le dit lui-même, liv. III, définitions, N. B.) (**). Cela posé, c est un

---

(*) Peut-être l'article de la page 366 du tome VIII des *Annales* et l'article déjà cité du tome X pourront-ils, sur ce point, suppléer au silence de M. Legendre.

J. D. G.

(**) Nous ne serions pas tout-à-fait de cet avis, ou pour mieux dire, nous ne voyons pas trop quel avantage on pourrait trouver à restreindre ainsi la signification du mot *calcul*. Le serrurier qui soude bout à bout deux barres de fer nous paraît faire une addition; et il fait une multiplication s'il en soude plusieurs de même longueur. Il fait une soustraction s'il raccourcit un de ces barreaux, et une division, s'il le coupe en plusieurs fragmens d'une même longueur, ou même s'il y applique le mètre pour le mesurer. En géométrie on ajoute, on retranche, on multiplie et on divise graphiquement les longueurs et les surfaces; et la logique même n'était pas distinguée du calcul, dans l'esprit de Hobbes. Les procédés d'exécution

nombre dépendant de l'unité linéaire, et A,B,C sont des nombres dépendant de l'unité angulaire. Or, si l'on avait $C=\varphi(A,B,c)$, on en tirerait $c=\text{f}(A,B,C)$; donc, en conservant l'angle droit comme unité angulaire, on aurait $\text{f}(A,B,C)$, nombre déterminé, constant et indépendant de l'unité linéaire, égal à un nombre c, variable en même temps que cette unité ; ce qui ne saurait avoir lieu ; de sorte qu'on doit avoir simplement $C=\varphi(A,B)$.

La démonstration, ainsi présentée, paraît à l'abri de toute objection ; cependant, on en découvre assez facilement le côté faible. On voit, en effet, que, si la forme de la fonction f, ou, ce qui revient au même, la forme de l'équation $C=\varphi(A,B,c)$ pouvait changer, avec l'unité linéaire, la relation $c=\text{f}(A,B,C)$ n'offrirait plus aucune absurdité ; et comment prouver que la forme de l'équation $C=\varphi(A,B,c)$ ne dépend pas de l'unité linéaire ?

La difficulté acquiert une nouvelle force par la considération suivante :

On a certainement $C=\psi(a,b,c)$; or, en prenant et conservant une unité linéaire déterminée, la fonction $\psi(a,b,c)$ sera un nombre déterminé, constant et indépendant de l'unité angulaire, d'où il suit que la forme de la fonction ψ doit varier avec l'unité angulaire, sans quoi l'équation $C=\psi(a,b,c)$ serait absurde, aussi bien que $c=\text{f}(A,B,C)$(*).

Or, si la forme de la relation entre les côtés et les angles d'un triangle dépend, en effet, de l'unité angulaire, comment osera-t-

peuvent varier avec la nature des objets sur lesquels on opère ; mais le but demeure toujours le même.

J. D. G.

(*) Cette difficulté a été, sinon complètement résolue, du moins singulièrement éclaircie, dans le mémoire déjà cité du tome X.e

J. D. G.

on affirmer, *à l'avance*, qu'elle ne dépend point de l'unité linéaire (*) ?

Voilà, Monsieur, ce que j'avais à dire sur la démonstration de M. Legendre, en l'entendant toutefois comme je l'ai expliqué ci-dessus. Mais, de quelque manière d'ailleurs qu'on veuille la développer, on sera toujours conduit à raisonner sur la *forme* de l'équation qui subsiste entre les côtés et les angles d'un triangle ; et on ne voit guère comment on pourra, *à priori*, avancer quelque chose de certain sur la forme d'une relation dont la trigonomètrie (fondée elle-même sur la similitude des triangles) donne la première idée.

Je terminerai, Monsieur, en essayant de mettre fin à la discussion qui s'est elevée entre M. Vincent et moi, relativement aux exposans fractionnaires. Elle se réduit finalement à la seule question : *peut-on réduire un exposant fractionnaire à sa plus simple expression, de même que toute autre fraction quelconque ?* En effet, si l'on répond affirmativement, M. Vincent a complètement raison : dans le cas contraire, mes raisonnemens conservent toute leur force. Or, cette réponse, quelle qu'elle soit, ne dépend que de la définition que l'on voudra donner de l'expression $a^{\frac{m}{n}}$. Posera-t-on $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$, ou bien $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$? Si l'on admet la première définition, il n'y a aucun doute sur l'identité entre $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{mp}{np}}$, ce que l'on prouve facilement, sans recourir à la formule

---

(*) Il nous paraît que, si les scrupules de M. Stein étaient fondés, il deviendrait superflu de calculer des formules générales, attendu que ces formules ne pourraient jamais être employées en pleine sécurité. Nous doutons que M. Stein lui-même soit fort disposé à accepter une conséquence aussi fâcheuse et incommode.

J. D. G.

$$(1) \qquad a^{\frac{m}{n}}=A(\text{Cos.}2\frac{m}{n}k\varpi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}2\frac{m}{n}k\varpi)\,,$$

qui elle-même n'est exacte qu'en supposant $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$.

Mais, si l'on admet l'autre définition, la formule (1) n'est plus exacte ; puisqu'en nommant A' la valeur arithmétique de $\sqrt[n]{a^m}$, on devra écrire

$$(2) \qquad a^{\frac{m}{n}}=A'\left(\text{Cos.}\frac{2k\varpi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2k\varpi}{n}\right).$$

Alors, d'une part, les expressions $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{mp}{np}}$ ne seront plus identiques, et d'une autre, le raisonnement de la page 93, fondé sur la formule (1), ne pourra plus être employé. Voilà donc un choix à faire entre les définitions

$$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m\,,\qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\,.$$

Le mien sera bientôt fait ; je me conformerai à l'usage général ; en écrivant $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. M. Vincent préférera peut-être l'autre définition, surtout parce qu'elle l'a conduit à des résultats tout nouveaux. Quant à moi, ces résultats même me paraissent un argument puissant en faveur de l'ancienne définition (*).

Agréez, etc.

Trèves, le 20 novembre 1825.

(*) Sans avoir jamais beaucoup réfléchi sur ce sujet, il nous paraît que demander si les deux expressions $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{mp}{np}}$ peuvent être indistinctement substituées l'une à l'autre, revient à demander s'il est indifférent de résou-

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème d'analise énoncé à la page 64 du présent volume ;

Par M. Vallès, élève à l'Ecole royale polytechnique (*).

Soient $p+q$ boules contenues dans une urne de laquelle il faille en extraire un nombre p ou un nombre q ; cette extraction pourra se faire d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{p+q}{1}\cdot\frac{p+q-1}{2}\cdot\frac{p+q-2}{3}\cdots\cdots\frac{p+1}{q}=\frac{p+q}{1}\cdot\frac{p+q-1}{2}\cdot\frac{p+q-2}{3}\cdots\frac{q+1}{p}.$$

---

dre par rapport à x l'une ou l'autre des équations $x^n=a^m$ et $x^{np}=a^{mp}$. Or la seconde peut être mise sous cette forme

$$(x^n-a^m)[x^{n(p-1)}+a^mx^{n(p-2)}+\ldots\ldots+a^{m(p-2)}x^n+a^{m(p-1)}]=0$$

et dès lors il paraît manifeste qu'elle donne d'abord les mêmes valeurs de x qu'on tire de la première et en outre toutes celles qu'on déduira de l'égalité du second facteur à zéro. La seconde est donc plus étendue que la première ; elles ne sont donc pas identiquement les mêmes ; elles ne sauraient donc impunément être substituées l'une à l'autre ; et il doit en être de même des expressions $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{mp}{np}}$. On ne saurait donc se permettre, sans dénaturer une quantité à exposant fractionnaire, de multiplier ou de diviser les deux termes de cet exposant par un même nombre entier.

J. D. G.

(*) A la page 120 du présent volume, M. Lenthéric a déduit très-simplement la démonstration de ce théorème d'un beau théorème de M. Ampère ; mais nous avons pensé que le lecteur ne serait pas fâché d'en avoir une démonstration directe ; et, parmi plusieurs qui nous sont parvenues, nous avons cru devoir distinguer celle-ci qui, en même temps qu'elle n'exige aucun calcul, ouvre une voie pour découvrir facilement beaucoup d'autres théorèmes du même genre. J. D. G.

Supposons présentement que, sur ces $p+q$ boules, il s'en trouve p blanches et q noires, et que p soit le nombre qu'il en faut extraire, elles pourront être toutes blanches, ou bien il y en aura $p-1$ blanches et 1 noire, ou $p-2$ blanches et 2 noires ou $p-3$ blanches et 3 noires, et ainsi de suite, jusqu'à 3 blanches et $p-3$ noires, ou 2 blanches et $p-2$ noires, ou 1 blanche et $p-1$ noires, ou enfin elles pourront toutes être noires, si du moins q n'est pas moindre que p.

Or les divers nombres de manières dont ces divers genres d'extractions peuvent être faits sont tels qu'on le voit dans le tableau suivant :

p blanches et o noires, de 1 manière ;

$p-1$ blanches et 1 noire, de $\frac{p}{1}\cdot\frac{q}{1}$ manières ;

$p-2$ blanches et 2 noires, de $\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{p-1}{2}$ manières ;

$p-3$ blanches et 3 noires, de $\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q-2}{3}$ manières ;

. . . .

d'où l'on voit que le nombre des manières différentes d'extraire p boules de l'urne pourra aussi être exprimé par

$$1+\frac{p}{1}\cdot\frac{q}{1}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{q-1}{2}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q-2}{3}+\ldots$$

Il sera donc permis d'égaler cette expression à l'une ou à l'autre des deux expressions ci-dessus, et de cette égalité résultera le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Si, en particulier, on suppose $q=p$, on obtiendra ce résultat remarquable

$$1+\left(\frac{p}{1}\right)^2+\left(\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\right)^2+\ldots\ldots=\frac{2p}{1}\cdot\frac{2p-1}{2}\cdot\frac{2p-2}{3}\cdot\frac{2p-3}{4}\ldots;$$

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Mémoire sur les lignes du second ordre;

Par M. CH. STURM.

(*Première Partie.*)

§. I.

SOIENT, sur un plan, deux lignes quelconques du second ordre (c), (c′), rapportées à deux axes de coordonnées rectangulaires ou obliques quelconques, et représentées respectivement par les deux équations

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\ , \qquad (c)$$

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F'=0\ . \qquad (c')$$

Les coordonnées des points d'intersection que peuvent avoir les deux courbes proposées doivent satisfaire, à la fois, à leurs deux équations (c), (c′); de sorte qu'elles sont déterminées par l'ensemble de ces deux équations. Considérant donc x et y comme les deux coordonnées inconnues de l'un quelconque de ces points d'intersection, on aura d'abord, par l'élimination de y^2, entre les deux équations (c), (c′), la suivante (γ), qui n'est que du premier degré en y

$$(AB'-BA')x^2+2(DB'-BD')x+(FB'-BF')+2\{(C'B-BC')x+(EB'-BE')\}y=0. \quad (\gamma)$$

Substituant la valeur de y qui en résulte dans l'une des équations (c), (c′), on parviendra à une équation en x du quatrième de-

gré, à coefficiens réels, dont les racines seront les abscisses des points communs aux deux courbes proposées. A chaque racine réelle correspondra, d'après l'équation (y), une valeur réelle de l'ordonnée y; et à chaque couple de racines imaginaires conjuguées, une couple de valeurs imaginaires conjuguées de y. Or, cette équation du quatrième degré en x pourra avoir quatre racines toutes réelles, ou bien deux racines réelles et une couple de racines imaginaires conjuguées, ou bien enfin quatre racines imaginaires, conjuguées deux à deux. Dans le premier cas, les deux courbes (c), (c′) auront quatre points d'intersection réels; dans le second, elles n'en auront que deux, et dans le troisième elles n'en auront aucune. On voit aussi par là que deux lignes du second ordre ne sauraient avoir plus de quatre points communs sans se confondre.

Supposons présentement qu'une troisième ligne (c″), d'un ordre quelconque, tracée sur le plan des deux premières (c), (c′), et rapportée aux mêmes axes, soit exprimée par une équation à laquelle satisfassent les coordonnées, soit réelles soit imaginaires, de chacun des points d'intersections des courbes (c), (c′); nous dirons alors que *cette courbe* (c″) *passe par les points d'intersection des deux premières* (c), (c′).

Il est visible que toute équation qu'on peut former par une combinaison des équations (c), (c′) exprime une telle courbe. Mais, si l'on veut que cette courbe (c″) soit elle-même une ligne du second ordre, il faudra combiner les équations (c), (c′) de telle sorte que l'équation résultante, qui doit représenter (c″), ne s'élève pas au-dessus du second degré. C'est ce qu'on ne peut obtenir qu'en ajoutant à l'une d'elles le produit de l'autre par un facteur numérique indéterminé m (*).

Il vient ainsi

(*) Il y aurait, peut-être, un peu plus de symétrie, mais pas plus de généralité, à prendre la somme des produits respectifs de ces deux équa-

$$(mA+A')x^2+(mB+B')y^2+2(mC+C')xy+2(mD+D')x$$
$$+2(mE+E')y+(F+F')=0\,;$$

Cette équation est d'abord évidemment satisfaite par les quatre systèmes de valeurs, soit réelles soit imaginaires, que donnent les équations (c), (c'), pour les coordonnées x, y de leurs points communs (*). En outre, on peut toujours, dans la même équation, disposer du facteur indéterminé m, de manière que la courbe qu'elle exprime remplisse une autre condition quelconque, celle, par exemple, de passer par un point donné; ce qui fera que cette courbe remplira, en tout, cinq conditions distinctes. Or une ligne du second ordre assujettie à remplir les cinq conditions dont il s'agit est complètement déterminée, puisque ces cinq conditions suffisent pour déterminer les rapports de l'un quelconque des coefficiens que renferme son équation générale aux cinq autres; donc l'équation à laquelle nous venons de parvenir ci-dessus peut effectivement représenter toute ligne du second ordre qui passe par les intersections des deux proposées (c), (c') ou qui a avec elles les mêmes points d'intersection; ces points ou plutôt leurs coordonnées, déduites des équations (c), (c'), pouvant être d'ailleurs indifféremment réels ou imaginaires.

---

tions par deux multiplicateurs λ et λ'. Il est manifeste, en effet, qu'en posant ensuite $\lambda=m\lambda'$, on retomberait sur le résultat qui vient d'être indiqué.

(*Note de l'Auteur.*)

(*) Il faut observer ici que, si une équation du second degré, en x et y, est satisfaite par ces valeurs imaginaires $x=f+g\sqrt{-1}$, $x=h+k\sqrt{-1}$, elle le sera nécessairement aussi par leurs conjuguées $x=f-g\sqrt{-1}$, $x=h-k\sqrt{-1}$.

(*Note de l'Auteur.*)

Mais l'équation de cette troisième courbe (c″) peut aussi s'écrire comme il suit :

$$A''x^2+B''y^2+2C''xy+2D''x+2E''y+F''=0 \; . \qquad (c'')$$

Exprimant donc qu'elle est identique avec la précédente, on aura ces *six relations*

$$mA+A'=A'' \; , \quad mB+B'=B'' \; , \quad mC+C'=C'' \; ,$$

$$mD+D'=D'' \; , \quad mE+E'=E'' \; , \quad mF+F'=F'' \; ,$$

signifiant que *la courbe* (c″) *passe par les points d'intersection des courbes* (c), (c′), *quels qu'ils soient* ; ou, ce qui revient au même, que *les trois lignes du second ordre* (c), (c′), (c″), *rapportées à deux axes quelconques de coordonnées, ont les mêmes points d'intersection, soit réels soit imaginaires.*

Au surplus, ces relations étant établies relativement au système d'axes de coordonnées auxquels nos trois courbes (c), (c′), (c″) sont actuellement rapportées, on peut aisément s'assurer, par la transformation des coordonnées, que, si l'on passe de ce premier système à tout autre, les mêmes relations subsisteront, entre les coefficiens correspondans des trois nouvelles équations qui représenteront (c), (c′), (c″) (*).

(*) Généralement, trois lignes du second ordre (c), (c′), (c″), rapportées aux mêmes axes quelconques, étant exprimées par les trois équations

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0 \; , \qquad (c)$$

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F'=0 \; , \qquad (c')$$

$$A''x^2+B''y^2+2C''xy+2D''x+2E''y+F''=0 \; , \qquad (c'')$$

dans lesquelles, sans rien ôter à leur généralité, on peut supposer tous les

§. II.

Ne considérons présentement que la seule courbe (c), donnée par l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0 \ . \qquad (c)$$

Par un point (x',y'), pris à volonté sur le plan de cette courbe, soient menées deux droites qui la coupent. Le système de ces deux droites sera représenté par une équation du second degré de la forme

$$A'(x-x')^2+B'(y-y')^2+2C'(x-x')(y-y')=0 \ ,$$

---

coefficiens entiers, si l'on peut trouver trois multiplicateurs λ, λ', λ'', qu'on peut également supposer entiers, positifs ou négatifs, tels qu'on ait

$$\lambda A+\lambda'A'+\lambda''A''=0 \ , \qquad \lambda D+\lambda'D'+\lambda''D''=0 \ ,$$

$$\lambda B+\lambda'B'+\lambda''B''=0 \ , \qquad \lambda E+\lambda'E'+\lambda''E''=0 \ ,$$

$$\lambda C+\lambda'C'+\lambda''C''=0 \ , \qquad \lambda F+\lambda'F'+\lambda''F''=0 \ ,$$

Il est manifeste qu'alors chacune de ces trois équations sera comportée par les deux autres ; de telle sorte que, quelles que soient les deux d'entre elles que l'on combine, par voie d'élimination, on en tirera toujours les quatre mêmes systèmes de valeurs de x et y ; ce qui revient à dire que les trois courbes passent par les quatre mêmes points.

Réciproquement, si les trois courbes passent par les quatre mêmes points, chacune des trois équations (c), (c'), (c'') sera comportée par les deux autres ; d'où il suit évidemment qu'il devra être possible de trouver trois multiplicateurs λ, λ', λ'', qui vérifient les six relations ci-dessus.

Or, que l'on rapporte ensuite les trois mêmes courbes à un autre système de coordonnées ; elles seront toujours en même situation les unes à l'égard des autres ; d'où il suit évidemment que six relations semblables aux précédentes devront encore avoir lieu.

J. D. G.

A', B', C' étant des coefficiens relatifs aux directions de ces deux droites. Si l'on développe cette équation, elle devient

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy-2(A'x'+C'y')x-2(B'y'+C'x')y+A'x'^2+B'y'^2+2C'x'y'=0. \quad (C')$$

Concevons une autre couple de droites, joignant les points de section des deux premières avec la courbe (c). Si l'on désigne par (x'',y'') le point de concours de ces nouvelles droites, leur système sera également exprimé par une équation unique de la forme

$$A''(x-x'')^2+B''(y-y'')^2+2C''(x-x'')(y-y'')=0,$$

dont le développement sera

$$A''x^2+B''y^2+2C''xy-2(A''x''+C''y'')x-2(B''y''+C''x'')y+A''x''^2+B''y''^2+2C''x''y''=0. \quad (C'')$$

Mais, puisque les deux couples de droites exprimées par les équations (C'), (C'') ont avec la courbe proposée (c) quatre points communs, et qu'ainsi on peut considérer les équations (c), (C'), (C'') comme appartenant à trois lignes du second ordre qui ont les mêmes points d'intersection; il faut (§. I.) que, moyennant une détermination convenable du facteur m, on ait, entre les coefficiens correspondans de ces trois équations, les six relations suivantes :

$$mA+A'=A'', \quad mB+B'=B'', \quad mC+C'=C'',$$

$$mD-(A'x'+C'y')=-(A''x''+C''y''),$$

$$mE-(B'y'+C'x')=-(B''y''+C''x''),$$

$$mF+(A'x'^2+B'y'^2+2C'x'y')=(A''x''^2+B''y''^2+2C''x''y''),$$

par lesquelles on peut effectivement déterminer les six inconnues m, x'', y'', A'', B'', C''.

Il est aisé d'en déduire une équation entre les coordonnées x'',

y'', du point de concours des deux droites (C$''$) délivrée à la fois des coefficiens A', B', C' et A'', B'', C'', aussi bien que du facteur m. Il suffit pour cela de prendre la somme des produits respectifs des six équations précédentes par $x'x''$, $y'y''$, $x'y''+y'x''$, $x'+x''$, $y'+y''$ et 1. On trouve ainsi, toutes réductions faites,

$$(Ax'+Cy'+D)x''+(By'+Cx'+E)y''+(Dx'+Ey'+F)=0 . \quad \text{(p)}$$

Comme cette dernière équation ne renferme x'', y'' qu'au premier degré, et qu'elle se trouve indépendante des coefficiens A', B', C', qui déterminent les directions des deux sécantes (C$'$), menées à la courbe (c), par le point fixe (x',y'); il en résulte que, quelles que soient ces directions, le point de concours (x'',y'') des deux cordes (C$''$), qui joignent les points de section de ces sécantes arbitraires, ne sortira pas d'une ligne droite donnée de position, et exprimée par l'équation (p). On a donc le théorème suivant :

Si, par un point fixe, pris arbitrairement sur le plan d'une ligne du second ordre, on mène à volonté deux droites qui la coupent, et que l'on joigne, par deux cordes, un point de section de l'une de ces sécantes avec un point de section de l'autre, puis les deux autres points de section restans; ces deux cordes auront toujours leur point de concours situé sur une certaine droite fixe, dont la situation, à l'égard de la courbe, est déterminée uniquement par celle du point fixe d'où partent les sécantes arbitraires.

A cause de la relation remarquable qui existe entre le point fixe et la droite qu'il détermine, ce point a été appelé le *pôle* de cette droite, qui est dite à l'inverse, la *polaire* de ce point. De même que, le point fixe étant pris arbitrairement, on peut toujours déterminer une droite qui ait avec lui la relation exprimée dans l'énoncé du théorème, on peut réciproquement, lorsque c'est la droite qui est donnée de position, déterminer le point qui est lié avec elle par une pareille relation. Il suffit, en effet, pour cela, d'expri-

mer que l'équation donnée de la droite dont il s'agit rentre dans l'équation (p) de la polaire, ce qui conduira à deux équations de condition, desquelles on déduira les coordonnées du point (x',y').

Il existe visiblement deux systèmes de cordes qui joignent les quatre points d'intersection de la courbe (c) avec les deux sécantes menées arbitrairement par le point fixe pris pour pôle. D'après le précédent théorème, le point de concours des deux cordes du premier système et le point de concours de celles du second sont indistinctement situés sur la polaire du point fixe; en sorte que la droite qui les joint coïncide avec cette polaire. On voit, en outre, par la même construction, que la polaire de chacun des points de concours dont il s'agit passe par le pôle proposé; d'où il suit que, *lorsqu'un point est situé sur une certaine ligne droite, sa polaire passe nécessairement par le pôle de cette droite*, et que *la droite qui joint deux points pris à volonté sur le plan d'une ligne du second ordre a son pôle à l'intersection des polaires de ces deux points*. Donc, *pour déterminer le pôle d'une droite donnée de position, sur le plan d'une ligne du second ordre, il suffit de construire les polaires de deux quelconques des points de sa direction. Le pôle cherché sera à l'intersection de ces polaires.*

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les deux sécantes menées à la courbe par le pôle avaient des directions quelconques. Or, il y a deux cas particuliers dans lesquels leurs quatre points d'intersection avec cette courbe se réduisent à deux seulement, et où, par suite, les deux systèmes de cordes qui joignent ces quatre points se réduisent à un seul.

Premièrement, si nous concevons que les deux sécantes arbitraires, partant du pôle (x',y'), se rapprochent jusqu'à se confondre en une seule, l'un des systèmes de cordes disparaîtra, et l'autre se changera en une couple de tangentes menées à la courbe, par les extrémités de la corde interceptée. Mais le théorème général devant subsister dans tous les cas, il en résulte que le point de concours de ces tangentes appartiendra à la polaire du point (x',y'). Donc,

si, par un point pris à volonté, sur le plan d'une ligne du second ordre, on lui mène une suite de sécantes, et que, par les points d'intersection de chacune d'elles avec la courbe, on mène à cette courbe deux tangentes, prolongées jusqu'à leur point de concours; tous les points de concours des couples de tangentes appartiendront à une même droite, polaire du point d'où les sécantes seront issues. Réciproquement, *si, des différens points d'une droite, menée arbitrairement, sur le plan d'une ligne du second ordre, on mène à cette courbe une suite de couples de tangentes; leurs cordes de contact iront toutes concourir en un même point, pôle de la droite dont il s'agit.* C'est de cette propriété particulière que les dénominations de pôle et de polaire tirent leur origine.

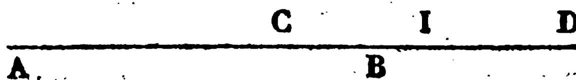
En second lieu, il peut arriver que la polaire ne coupe pas la courbe ou qu'elle la coupe en deux points. Dans ce dernier cas, il est aisé de voir que la droite tirée du pôle à l'un quelconque des points d'intersection de la polaire avec la courbe ne peut avoir avec cette courbe que ce seul point commun; c'est-à-dire que, *lorsque la polaire coupe la courbe, elle coïncide avec la corde de contact des deux tangentes issues du pôle*; proposition qui découle d'ailleurs des précédentes. Au surplus le pôle est *extérieur* ou *intérieur* à la courbe, suivant que la polaire la coupe ou ne la rencontre pas.

Observons encore que, dans le cas particulier où le pôle serait pris sur la courbe elle-même, la polaire ne différerait pas de la tangente en ce point; en sorte que, si l'on prend, sur une ligne (c) du second ordre, un point quelconque (x',y'), l'équation (p) sera celle de sa tangente en ce point.

Pour revenir aux propriétés générales du pôle et de la polaire, nous allons rechercher quelle est la relation entre les quatre points déterminés sur une droite menée arbitrairement par le pôle; savoir: ce pôle lui-même, l'intersection de cette droite avec la polaire, et ses deux intersections avec la courbe. Mais, auparavant, nous devons donner ici quelques notions et définitions préliminaires.

Lorsque quatre points A, B, C, D sont distribués sur une droite de telle sorte que les distances AC, BC de deux A, B de ces points au troisième C, sont proportionnelles aux distances AD, BD des deux mêmes points A, B au quatrième D, de telle sorte qu'on ait $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$, on dit de cette droite qu'elle est coupée *harmoniquement* par ces quatre points qui sont dits eux-mêmes des *points harmoniques*. Les deux premiers A, B sont dits *conjugués* l'un à l'autre, par rapport aux deux autres C, D, qui sont dits pareillement *conjugués* par rapport aux premiers; attendu que notre proportion peut être écrite ainsi $\frac{CA}{DA}=\frac{CB}{DB}$. De deux points conjugués, l'un est toujours situé entre les deux autres et l'autre sur le prolongement de l'intervalle qui les sépare. Trois de ces points donnés de position déterminent toujours le quatrième; et, si l'un d'eux s'éloigne à l'infini, son conjugué est alors au milieu de l'intervalle qui sépare les deux autres (*).

Supposons, pour fixer les idées, que le point A soit extérieur à CD, et que le point B lui soit intérieur, comme on le voit dans la figure;



la proportion $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$ pourra être écrite ainsi

(*) On rencontre un exemple très-familier de quatre points distribués de la sorte dans les centres de deux cercles, le point de concours de leurs tangentes communes extérieures, et le point de concours de leurs tangentes communes intérieures.

En général, si l'on cherche sur une droite un point dont les distances à deux points donnés de cette droite soient entre elles dans un rapport

$$\frac{AB-BC}{BC}=\frac{AD}{AD-AB}\ ;$$

d'où, en chassant les dénominateurs, développant et transposant

$$AB(AD-AB+BC)=2BC.AD$$

c'est-à-dire,

$$AB.CD=2BC.AD\ ;$$

et, comme on a $BC.AD=AC.BD$, on pourra écrire

$$AB.CD=2AC.BD=2BC.AD\ .$$

De cette dernière équation on tire

$$2AC.BD=CD(AC+BC)\ ,$$

ou bien

$$AC(2BD-CD)=BC.CD$$

d'où

$$\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{2BD-CD}\ ;$$

mais, si I est le milieu de l'intervalle CD, on pourra écrire

$$\frac{AC}{BC}=\frac{2CI}{2BD-2ID}=\frac{CI}{BD-ID}=\frac{CI}{BI}\ ;$$

et l'on aura aussi

---

donné ; le problème aura deux solutions, et alors les deux points donnés et les deux points qui résoudront le problème seront quatre points harmoniques.

J. D. G.

$$2AC.BD = CD.(AD - BD)$$

ou bien

$$BD(2AC + CD) = AD.CD$$

d'où

$$\frac{AD}{BD} = \frac{2AC+CD}{CD} = \frac{2AC+2CI}{2CI} = \frac{AC+CI}{CI} = \frac{AI}{CI}.$$

On a donc d'après cela

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CI}{BI}, \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AI}{CI};$$

puis donc que les premiers membres de ces deux équations sont égaux, on aura, en égalant leurs seconds membres,

$$\overline{CI}^2 = AI.BI;$$

et ensuite, en éliminant CI

$$\frac{AI}{BI} = \frac{AC}{BC}. \quad \frac{AD}{BD} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{BD}^2}.$$

Si l'on fait $AB = x$, $AC = x''$ et $AD = x'$, l'équation $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ deviendra $\frac{x''}{x - x''} = \frac{x'}{x' - x}$; ce qui donne, toutes réductions faites;

$$2x'x'' = x(x' + x'').$$

Cela posé, transportons, pour plus de simplicité, au pôle l'origine qui est arbitraire, en prenant pour axe des x une droite quel-

conque passant par ce pôle, nous aurons ainsi $x'=0$, $y'=0$, et l'équation de la polaire deviendra simplement

$$Dx+Ey+F=0 .$$

de sorte que l'abscisse de son intersection avec l'axe des x sera donnée par la formule

$$x=-\frac{F}{D} ;$$

quant aux intersections de la courbe avec le même axe, elles seront données par l'équation

$$Ax^2+2Dx+F=0 ,$$

de sorte qu'en désignant par x', x'' les distances de ces intersections à l'origine, on aura

$$x'+x''=-\frac{2D}{A} , \qquad x'x''=\frac{F}{A} .$$

On aura, d'après cela

$$2x'x''=\frac{2F}{A} , \qquad x(x'+x'')=-\frac{F}{L}\times-\frac{2D}{A}=\frac{2F}{A} ;$$

et, par suite

$$2x'x''=x(x'+x'') ;$$

propriété caractéristique de quatre points harmoniques ; de sorte que *toute sécante menée par le pôle est divisée harmoniquement par ce pôle, par sa polaire et par la courbe* (*).

(*) On peut se demander ici ce que devient la relation harmonique dont

§. III.

Comme le système de deux droites, tracées sur un plan, fait partie des lignes du second ordre, nous pouvons y appliquer les résultats précédens.

---

il s'agit, pour celles des droites issues du pôle qui ne coupent pas la courbe. La réponse à cette question se trouve dans les considérations suivantes.

Soit une ligne du second ordre et une droite, tracées sur un même plan, et données par leurs équations. Si l'on cherche, par l'analise, leurs points d'intersection ; en désignant par (x,y) l'un quelconque d'entre eux, on trouvera, pour déterminer la coordonnée x, une équation du second degré dont les coefficiens seront toujours réels. Suivant que les deux racines de cette équation seront réelles ou imaginaires, les valeurs correspondantes de l'autre coordonnée y seront aussi réelles ou imaginaires. Dans le premier cas, la droite coupera effectivement la courbe ; dans le second, elle ne la coupera pas, et ses points d'intersection avec elle seront *imaginaires*.

Quoi qu'il en soit, il suit de la nature de l'équation du second degré qui donne les coordonnées de ces points d'intersection parallèles à un même axe, qu'on aura, dans l'un et l'autre cas, des valeurs *réelles* pour la *somme* et pour le *produit* de ces deux coordonnées. On observera que ceci a lieu, en particulier, lorsque les abscisses sont comptées sur la droite proposée elle-même.

En supposant que les deux points de section existent en réalité, concevons un autre point P, lié à ceux-là par une dépendance symétrique ; de telle sorte que les coordonnées de ce point P soient des fonctions symétriques de celles qui appartiennent aux deux premiers ; ces fonctions pourront donc être exprimées uniquement au moyen des somme et produit dont il vient d'être question : elles devront conséquemment conserver des valeurs réelles, lors même que les coordonnées des points d'intersection seront devenues imaginaires. Il suit de là que le point P, en tant qu'il est déterminé par ses coordonnées, et que ces coordonnées ont pour expression les fonctions symétriques dont il s'agit, demeure réel et constructible, lors même que les deux points d'intersection passent du réel à l'imaginaire ; bien qu'alors ce point P ne puisse plus être construit au moyen

Et d'abord *si l'on coupe un angle fixe par deux sécantes arbitraires issues d'un même point fixe du plan de cet angle ; et que l'on joigne les points d'intersection des deux sécantes avec les deux côtés de l'angle par deux nouvelles droites ; ces dernières concourront toujours sur une certaine droite fixe, dont la situation ne dépendra uniquement que de celle du point fixe par rapport à*

---

des conditions graphiques par lesquelles il était d'abord lié aux deux autres, ceux-ci ayant disparu. Il n'y aura cependant aucun inconvénient à lui conserver sa dénomination ou définition primitive.

C'est ainsi, par exemple, que le milieu de la corde intercepté sur une droite, par son intersection avec une ligne du second ordre, est un point toujours réel et assignable, lors même que la droite ne coupe plus la courbe ; c'est-à-dire, lorsque les deux extrémités de la corde interceptée sont devenues imaginaires. Ce milieu est déterminé, dans tous les cas, par la rencontre de cette droite avec le conjugué du diamètre qui lui est parallèle. De même, le conjugué harmonique d'un point donné sur la même droite, par rapport à ses deux points d'intersection imaginaires avec la courbe, est toujours constructible, au moyen de la relation $2x'x''=x(x'+x'')$, dans laquelle le point donné est pris pour origine des x, et où x est sa distance au point cherché, parce que $x'+x''$ et $x'x''$ sont réels, lors même que x' et x'' sont imaginaires, puisqu'ils sont alors de la forme $x'=p+q\sqrt{-1}$ et $x''=p-q\sqrt{-1}$. Il est aussi donné graphiquement par l'intersection de la droite donnée avec la polaire du point donné ; et il n'en faut pas davantage pour comprendre comment, dans un groupe harmonique, deux points conjugués peuvent être réels, bien que les deux autres soient imaginaires.

Les remarques qui précèdent doivent être étendues aux intersections des lignes droites avec les courbes de tous les degrés. Il ne faut jamais les perdre de vue, parce qu'elles sont nécessaires pour donner aux relations que fournit la théorie des transversales et à d'autres relations que nous ferons connaître par la suite, toute la généralité convenable. On ne doit pas d'ailleurs les confondre avec les considérations de M. Poncelet sur la loi de continuité. La distinction en a été déjà faite, avec soin, par M. Cauchy, dans son rapport inséré au tome XI.e des *Annales* (pag. 69) et placé depuis en tête du *Traité des Propriétés projectives des figures.*

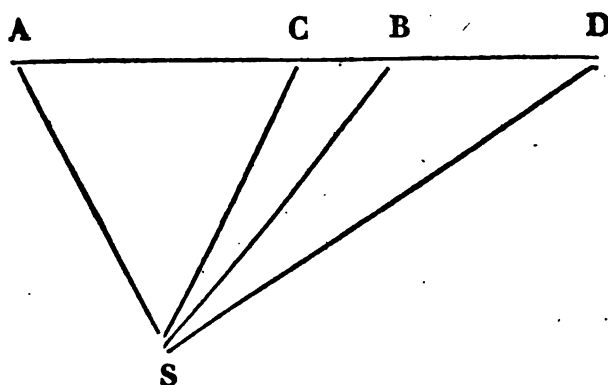
(*Note de l'Auteur.*)

l'angle dont il s'agit. Cette droite qu'on pourra appeler la polaire du point fixe, passera évidemment par le sommet de l'angle.

La construction qui donne un point quelconque de cette polaire fait voir que ce point est, à son tour, le pôle de la droite qui joint le sommet de l'angle au pôle primitif, de sorte que toute droite menée par ce nouveau pôle est coupée harmoniquement par ce point lui-même, par sa polaire et par les deux côtés de l'angle. De là résultent deux conséquences ; premièrement, *les différens points d'une droite menée arbitrairement par le sommet d'un angle et dans son plan, n'ont qu'une seule et même polaire située dans ce plan, et passant comme elle par le sommet de l'angle ;* en second lieu, *si quatre droites, issues d'un même point et comprises dans un même plan, sont tellement dirigées qu'elles divisent harmoniquement une seule droite tracée dans ce plan, elles diviseront aussi harmoniquement toute autre droite qu'on voudra tracer dans le même plan.* A cause de cette propriété, l'ensemble de ces quatre droites est appelé *faisceau harmonique.* Elles sont conjuguées deux à deux, comme les points d'un groupe harmonique.

On doit observer que, *si un faisceau harmonique est coupé par une parallèle à l'une des droites qui le compose, la conjuguée de cette droite passera par le milieu de la portion de parallèle interceptée entre les deux autres.* En particulier, *si deux des droites du faisceau, conjuguées entre elles, sont perpendiculaires l'une à l'autre, elles diviseront en deux parties égales les quatre angles formés par les deux autres.*

Démontrons présentement que, *si quatre droites issues d'un même point, forment un faisceau harmonique, les sinus des angles que formera l'une d'elles avec les deux qui ne lui sont pas conjuguées, seront proportionnels au sinus des angles que formera la droite restante avec les deux mêmes droites, et réciproquement.*



Soient, comme ci-dessus, les quatre points harmoniques A, B, C, D; les deux premiers conjugués l'un à l'autre, ainsi que les deux derniers, en sorte qu'on ait, comme alors $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$ D'un point quelconque S, hors de leur direction, soient menées à ces quatre points les droites SA, SB, SC, SD, qui formeront un faisceau harmonique, dans lequel les deux premières droites, ainsi que les deux dernières, seront conjuguées l'une à l'autre. En vertu de la proportionnalité des sinus des angles des triangles aux côtés qui leur sont opposés, on aura

$$\frac{AC}{AS}=\frac{\text{Sin.}ASC}{\text{Sin.}ACS}, \qquad \frac{BC}{BS}=\frac{\text{Sin.}BSC}{\text{Sin.}BCS};$$

d'où, à cause de Sin ACS=Sin.BCS,

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AS}{BS}\cdot\frac{\text{Sin.}ASC}{\text{Sin.}BSC};$$

et, en suite,

$$\frac{AD}{AS}=\frac{\text{Sin.}ASD}{\text{Sin.}ADS}, \qquad \frac{BD}{BS}=\frac{\text{Sin.}BSD}{\text{Sin.}BDS};$$

d'où, à cause de Sin ADS=Sin.BDS,

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AS}{BS}\,\frac{\text{Sin.}ASD}{\text{Sin.}BSD}\ ;$$

donc enfin, à cause de $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$

$$\frac{\text{Sin.}ASC}{\text{Sin.}BSC}=\frac{\text{Sin.}ASD}{\text{Sin.}BSD}\ ;$$

comme nous l'avions annoncé. Il sera aisé de prouver, d'après cela, que, réciproquement, si cette dernière relation a lieu, on aura aussi $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$ et que, par conséquent, les droites SA, SB, SC, SD formeront un faisceau harmonique. On pourrait, au surplus, simplifier l'une et l'autre démonstrations, en supposant la sécante parallèle à une des droites du faisceau.

On nomme *quadrilatère complet*, le système de quatre droites indéfinies tracées sur un même plan, de manière que trois d'entre elles ne concourent pas en un même point. Ces quatre droites sont dites les *côtés du quadrilatère*, lesquels se coupent en six points tels qu'il y en a toujours trois sur chacun d'eux. Ces points sont dits les *sommets* du quadrilatère; et les droites, au nombre de trois, qui joignent un sommet à un autre, qui n'appartient pas au même côté, en sont dites les *diagonales*.

Il est aisé de conclure de ces définitions et de ce qui a été dit ci-dessus que, *dans tout quadrilatère complet, les extrémités de l'une quelconque des trois diagonales et les deux points où sa direction est coupée par celles des deux autres sont quatre points harmoniques*. On conclut de là le moyen de construire, avec la règle seulement, le quatrième harmonique de trois points donnés. Soient en effet A, B, C ces trois points, A et B étant conjugués l'un à l'autre. Par A et B soient menées arbitrairement deux droites concourant en E, et soit menée CE; par A soit encore me-

née l'arbitraire AF, coupant CE et BE en G et F; soit enfin menée BG, coupant AE en H; si alors on mène FH, son point D d'intersection avec AB sera le quatrième harmonique cherché. On pourra donc aussi construire tout aussi facilement le quatrième harmonique de trois droites données.

Si, en particulier, deux des trois diagonales du quadrilatère complet sont parallèles entre elles, chacune d'elles sera divisée en deux parties égales par la troisième; ce qui revient à dire que, *dans un trapèze, la droite qui joint le point de concours des deux côtés non parallèles au point de concours des deux diagonales, passe par les milieux des deux côtés parallèles.* On déduit de là 1.° le moyen de diviser une droite, avec la règle seulement, en deux parties égales, pourvu qu'on ait une seule droite parallèle à celle-là; 2.° le moyen de mener par un point donné, avec la règle seulement, une parallèle à une droite donnée, pourvu qu'on ait sur cette droite trois points équidistans.

On peut encore remarquer que, *dans un trapèze, le point de concours des deux diagonales, le point de concours des deux côtés non parallèles et les milieux des deux côtés parallèles sont quatre points harmoniquement distribués sur une même droite.*

§. IV.

Il serait facile, en suivant une marche purement géométrique, de déduire immédiatement de la théorie des pôles et polaires exposée ci-dessus (§. II.), toutes les définitions et propriétés connues du *centre*, des *diamètres*, des *axes* et des *asymptotes* des lignes du second ordre; mais il nous paraît préférable de traiter ce sujet analitiquement. Retournons donc à la courbe (c), pour examiner les diverses positions que peuvent prendre, sur son plan, le pôle (x',y') et la polaire (p).

Cherchons d'abord s'il est une position du pôle pour laquelle la polaire passe toute entière à l'infini. Il faudra, pour cela, que

les quantités qui multiplient x et y dans l'équation (p) de cette polaire, soient séparément égales à zéro ; car autrement la droite représentée par cette équation pourrait être construite et par suite accessible, dans une partie de son cours. Posons donc, à la fois

$$\left.\begin{array}{l} Ax'+Cy'+D=0\ , \\ By'+Cx'+E=0\ . \end{array}\right\} \quad (C)$$

Comme ces deux équations, qui déterminent les coordonnées inconnues x',y', ne sont que du premier degré, on voit qu'en général, *il y a sur le plan d'une ligne du second ordre, un point unique dont la polaire est toute entière à l'infini* ; conséquemment, *ce point est le milieu commun de toutes les cordes qui y passent ; les tangentes menées à la courbe, par les extrémites de chacune de ces cordes sont parallèles entre elles : et il en est de même des droites qui joignent les extrémités de ces mêmes cordes, prises deux à deux.*

Le point qui jouit de ces propriétés, et dont les coordonnées sont déterminées par les équations (C), est ce qu'on nomme le *centre de la courbe*. Au surplus, la ligne du second ordre proposée peut être telle que son centre soit à l'infini, ou qu'elle ait une infinité de centres, distribués sur une même droite donnée de position.

Par une supposition inverse de la précédente, concevons que le pôle (x',y') s'éloigne à l'infini, en parcourant une droite donnée par l'équation $y=mx+g$, tellement qu'on ait

$$y'=mx'+g\ .$$

Si l'on met cette valeur de y' dans l'équation (p) et qu'on y pose ensuite x' infini, elle deviendra

$$(A+Cm)x+(C+Bm)y+(D+Em)=0\ . \qquad (d)$$

En l'écrivant sous cette forme

$$Ax+Cy+D+m(By+Cx+E)=0 ,$$

on voit que, quel que soit m, la droite qu'elle représente passe par le point dont les coordonnées x', y' sont déterminées par les équations (C). Comme d'ailleurs, dans le cas présent, toutes les sécantes partant du pôle se changent en un système de droites parallèles entre elles et à la droite $y=mx+g$; il en résulte ce théorème : *Si l'on inscrit à une ligne du second ordre une suite de cordes parallèles à une droite de position arbitraire, les milieux de ces cordes, les points de concours des tangentes à la courbe menées par les extrémités de chacune d'elles et les droites qui joindront les extrémités des mêmes droites, prises deux à deux, appartiendront toutes à une même ligne droite, passant par le centre de la courbe.* Cette droite est appelée un *diamètre de la courbe.*

Supposons son équation (d) mise sous la forme

$$y=m'x+g' ;$$

nous aurons

$$m'=-\frac{A+Cm}{C+Bm} ;$$

c'est-à-dire,

$$A+C(m+m')+Bmm'=0 .$$

Cette équation étant symétrique en m et m', on en peut conclure que *toutes les cordes d'une ligne du second ordre parallèles à l'un quelconque de ses diamètres ont leurs milieux sur un autre diamètre tel que, réciproquement, toutes les cordes qui lui sont parallèles ont leurs milieux sur le premier.* On nomme *diamètres conjugués* deux diamètres qui ont entre eux une semblable corrélation. Non seulement *toute ligne du second ordre a une infinité de systèmes de diamètres conjugués*, mais encore on voit que *tout diamètre*

d'une ligne du second ordre est nécessairement conjugué à un autre diamètre de la courbe. Si l'on mène, par le centre, deux diamètres quelconques, leurs extrémités seront les sommets d'un parallèlogramme dont les côtés opposés seront respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe, et divisés par ces diamètres en deux parties égales. En particulier, si l'on décrit du centre, avec un rayon arbitraire, un cercle coupant la courbe en quatre points, ces quatre points seront les sommets d'un rectangle dont les côtés seront parallèles aux deux *diamètres principaux* ou *axes* de cette courbe.

Nous avons trouvé que, si $y=mx+g$ est l'équation d'un diamètre, celle de son conjugué pourrait prendre la forme

$$Ax+Cy+D+m(By+Cx+E)=0 .$$

Si l'on suppose le premier diamètre parallèle soit à l'axe des x soit à l'axe des y, en faisant tour-à-tour $m=0$, $m=\frac{1}{0}$, l'équation de son conjugué deviendra successivement

$$\left.\begin{array}{l} Ax+Cy+D=0 , \\ By+Cx+E=0 . \end{array}\right\} \quad (e)$$

Ces deux équations appartiennent donc aux deux diamètres dont les conjugués sont parallèles, l'un à l'axe des x et l'autre à l'axe des y. En supposant le premier diamètre $y=mx+g$ parallèle à l'axe des x, si l'on veut que son conjugué, dont l'équation est alors

$$Ax+Cy+D=0 ,$$

soit parallèle à l'axe des y, il faudra nécessairement qu'on ait, dans son équation, et conséquemment dans celle (c) de la courbe $C=0$; conclusion qu'on tirerait également des deux équations (e),

en exprimant que les diamètres qu'elle représente sont parallèles aux axes des x et des y, respectivement. Ainsi *le parallélisme des axes à deux diamètres conjugués quelconques a la propriété de priver l'équation de la courbe du terme qui renferme le produit des deux coordonnées.* Il est aisé de voir, en outre, qu'elle ne peut être privée de ce terme que sous cette condition.

Si l'origine était placée au centre de la courbe, les équations (C), dans lesquelles x', y' sont les coordonnées de ce centre, devraient avoir lieu, dans la supposition de $x'=0$, $y'=0$: on aurait donc $D=0$, $E=0$; ainsi *la situation de l'origine des coordonnées au centre jouit de la propriété de priver l'équation de la courbe des termes qui renferment les premières puissances des deux variables*, et on voit aussi qu'*elle en jouit exclusivement.*

Si donc on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués quelconques, l'équation de la courbe se réduira à cette forme très-simple

$$ax^2+by^2+f=0\ ,$$

sous laquelle la discussion ultérieure de cette courbe devient extrêmement facile.

A la vérité, cette forme ne pourrait plus avoir lieu, si la courbe n'avait pas de centre, ce qui arrive lorsqu'on a $C^2-AB=0$; mais, en prenant pour axes un diamètre quelconque et la tangente à l'une de ses extrémités, tangente parallèle au conjugué de ce diamètre, on pourra toujours présenter l'équation de la courbe sous cette forme

$$ax^2+by^2+2dx=0\ ;$$

qui convient également aux lignes du second ordre qui ont un centre et à celles qui en sont dépourvues.

Maintenant, si l'on prend, sur l'axe des x, un point quelconque dont x' soit la distance à l'origine, sa polaire, dont l'équation sera alors

$$(ax'+d)x+dx'=0\ ,$$

se trouvera ainsi parallèle à l'axe des y ; c'est-à-dire que *tout point pris sur le plan d'une ligne du second ordre a sa polaire parallèle au conjugué du diamètre qui passe par ce point et réciproquement.*

L'équation actuelle de la courbe, lorqu'on y fait $y=0$, donne la longueur du diamètre dont la direction coïncide avec l'axe des x. Cette longueur étant désignée par $2c$, c sera l'abcisse du centre, et l'on aura

$$ac+d=0\ .$$

En conséquence l'équation $(ax'+d)x+dx'=0$, devient

$$(x'-c)x-cx'=0 \quad \text{ou} \quad (x'-c)(x-c)=c^2\ ;$$

de sorte que *la moitié du diamètre dont la direction passe par le pôle est moyenne proportionnelle entre les deux segmens que le pôle et la polaire forment sur ce diamètre, à partir du centre* ; propriété qui résulte d'ailleurs (§. II) de ce que le pôle et la polaire coupent harmoniquement le diamètre dont il s'agit.

Dans le cas de la parabole, qui n'a pas de centre, et pour laquelle $a=0$, l'équation de la polaire se réduit à $x+x'=0$, en sorte que, *dans la parabole, la portion de diamètre compris entre un point et sa polaire, est coupée par la courbe en deux parties égales.*

§. V.

Soient a, b, c, d quatre points pris arbitrairement sur le plan d'une ligne du second ordre ; et soient respectivement e, f, g les points de concours de ab et cd, ac et bd, ad et bc.

Par ces quatre points soient menées à la courbe des tangentes que nous désignerons respectivement par A, B, C, D. En convenant

de désigner généralement par (P, Q) l'intersection de deux droites désignées par P et Q ; représentons par E, F, G les droites qui joignent le point (A, B) au point (C, D), le point (A, C) au point (B, D), et enfin le point (A, D) au point (B, C) : nous aurons ainsi deux quadrilatères, l'un inscrit et l'autre circonscrit à la courbe ; de telle sorte que les sommets de l'inscrit seront les points de contact du circonscrit.

Les points (A, B), (A, C), (B, C), (A, D), (B, D), (C, D) seront les pôles respectifs des droites *ab*, *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, *cd*. Or, il résulte de là 1.° que la droite E contiendra les points *f* et *g*, que la droite F contiendra les points *g* et *e*, et que la droite G contiendra les points *e* et *f* ; 2.° que les droites F et G concourront en *e*, les droites G et E en *f*, et les droites E et F en *g* ; 3.° que chaque côté du quadrilatère circonscrit sera coupé harmoniquement par son opposé et par son point de contact avec la courbe ; 4.° enfin que les quatre droites qui passeront par chacun des sommets du quadrilatère inscrit formeront un faisceau harmonique.

De là il est facile de conclure que, *lorsque deux quadrilatères sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une ligne du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit sont les points de contact du circonscrit ;* 1.° *les diagonales des deux quadrilatères se coupent toutes quatre en un même point, où elles forment un faisceau harmonique ;* 2.° *les points de concours des directions des côtés opposés sont tous quatre harmoniquement distribués sur une même droite, polaire du point de concours des quatre diagonales ;* 3.° *chaque diagonale du quadrilatère circonscrit concourt avec deux côtés opposés de l'inscrit, et forme, avec ces côtés et la droite qui joint leurs points de concours, un faisceau harmonique ; ou, en d'autres termes, chaque point de concours de deux côtés opposés du quadrilatère inscrit est en ligne droite avec deux sommets opposés du circonscrit, et forme, avec ces sommets et le point de concours des quatre diagonales, un système de quatre points harmoniques.*

Il résulte de ces propriétés des quadrilatères inscrit et circonscrit à une même ligne du second ordre, sous la condition indiquée, que, si l'on donne quatre points de la courbe et la tangente en l'un d'eux, ou bien quatre tangentes à la courbe et le point de contact de l'une d'elles, on obtiendra de suite, par des constructions qui n'exigeront que le simple usage de la règle, soit les tangentes aux trois autres points, soit les points de contact des trois autres tangentes. Plus généralement, toutes les fois que l'on connaîtra, dans la figure, des élémens en nombre suffisant pour déterminer les deux quadrilatères et la courbe à laquelle ils doivent être inscrit et circonscrit, on pourra toujours se servir de ces données pour achever de construire ces deux quadrilatères, sans que la courbe soit décrite.

Donc toutes les fois qu'on sera parvenu à la connaissance de deux tangentes et de leurs points de contact, et qu'on aura en outre un troisième point ou une troisième tangente quelconque de la courbe, on sera en état d'en construire, en n'employant que la règle seulement, tant d'autres points ou tant d'autres tangentes qu'on voudra.

Soit, en effet, 1.° AMC l'angle des deux tangentes, soient A et C leurs points de contact; et soit B un troisième point quelconque de la courbe. Par le sommet M de l'angle des deux tangentes, soit menée une droite arbitraire et indéfinie, coupée par AB en P et par BC en Q. Soient menées PC et QA, se coupant en D; ce point D sera un quatrième point de la courbe; et, à cause de l'indétermination de la direction de MP, on pourra, en variant cette direction, déterminer tant d'autres points D de cette courbe qu'on voudra. Menant alors les deux diagonales AC, BD du quadrilatère inscrit, se coupant en O; la droite PO déterminera, sur les tangentes MA, MC, deux sommets opposés E, G du quadrilatère circonscrit, tandis que la droite QO déterminera, sur ces deux mêmes droites, les deux autres sommets opposés F, H de ce même quadrilatère. On aura donc ainsi quatre points de la courbe et les tangentes en ces quatre points; et on pourra ainsi détermi-

ner tant de points de cette courbe et tant de tangentes qu'on voudra.

2.° Soit AFGC le polygone ouvert formé par trois tangentes consécutives, et soient A et C les points de contact des deux tangentes extrêmes. Soit menée AC, sur la direction de laquelle soit pris arbitrairement un point O. En menant FO, concourant avec GC en H et GO, concourant avec FA en E, la droite EH sera une quatrième tangente; et, à cause de l'indétermination du point O sur AC, on pourra, en variant sa position, déterminer tant d'autres tangentes EH à la courbe qu'on voudra. Menant alors GH et EF, concourant en M, puis FG et EH, concourant en N, et enfin EG et FH, coupant MN en P et Q; l'intersection B de FG avec PA ou QC sera le point de contact de cette tangente; et l'intersection D de EH avec PC ou QA sera le point de contact de son opposée. On aura donc ainsi quatre tangentes à la courbe et leurs points de contact; et l'on pourra ainsi avoir autant de tangentes à cette courbe et autant de points de son périmètre qu'on voudra.

En considérant que PQ, qui joint les points de concours P et Q des directions des côtés opposés du quadrilatère inscrit, contient les pôles M et N de ses deux diagonales, on reconnaît que, si l'on fait varier ce quadrilatère inscrit de telle sorte que, ses sommets opposés A et C demeurant fixes, sa diagonale BD prenne toutes les situations qu'on voudra, cette droite PQ demeurera assujettie à passer constamment par le pôle M de la diagonale AC; c'est-à-dire, que, *si l'on inscrit à une ligne du second ordre une suite de quadrilatères ayant deux côtés opposés communs, les droites qui joindront les deux points de concours des directions de leurs côtés opposés, iront toutes concourir en un même point fixe, pôle de leur diagonale commune.*

De même, en considérant que le point O de concours des diagonales du quadrilatère circonscrit est sur la droite AC qui joint les points de contact de la courbe avec les deux côtés opposés EF et

GH ; et qui a son pôle au point de concours M de ces deux côtés ; on en conclura que, ces mêmes côtés restant fixes, si les deux autres varient d'une manière quelconque, en demeurant d'ailleurs constamment tangens à la courbe, l'intersection O des deux diagonales ne sortira pas de la polaire AC du point M ; c'est-à-dire, que, *si l'on circonscrit à une ligne du second ordre une suite de quadrilatères, dont deux côtés opposés soient de direction invariable, les diagonales de ces quadrilatères se couperont constamment sur une même droite, polaire du point de concours des deux côtés communs à tous.*

De là nous tirerons quelques conséquences qui méritent d'être remarquées.

Il est connu, et nous aurons occasion de le prouver plus tard, qu'étant donnés cinq points quelconques, sur un plan, il existe toujours une ligne du second ordre qui passe par ces cinq points. Supposons donc cette courbe décrite, en sorte que les cinq points se trouvent sur son périmètre ; si de trois quelconques de ces points on mène aux deux autres trois couples de droites ; en combinant ces couples deux à deux, on formera trois quadrilatères simples, inscrits à la courbe, et ayant deux sommets opposés communs ou une diagonale commune ; donc, suivant ce qui a été établi ci-dessus, les droites joignant les points de concours de leurs côtés opposés, iront concourir toutes trois en un même point, pôle de cette diagonale commune. Ainsi *cinq points étant pris, à volonté, sur un plan, si de trois quelconques de ces points on mène aux deux autres trois couples de droites ; en prenant ces couples deux à deux, on aura trois quadrilatères simples tels que les droites joignant les points de concours des directions de leurs côtés opposés iront toutes trois concourir en un même point. En outre, ce point sera, relativement à la ligne du second ordre qu'on peut toujours faire passer par les cinq points donnés, le pôle de la diagonale commune aux trois quadrilatères.*

Si l'on suppose que les deux extrémités de la diagonale com-

mune s'éloignent à l'infini, en parcourant deux droites fixes indéfinies, données de position, on conclura de ce théorème le corollaire suivant : *Si, sur les trois côtés d'un triangle quelconque, pris tour à tour pour diagonales, on construit trois parallélogrammes, dont les côtés soient respectivement parallèles à deux droites quelconques, données de position ; les trois autres diagonales de ces parallélogrammes iront concourir en un même point, centre d'une hyperbole circonscrite au triangle et ayant ses asymptotes parallèles aux deux droites données de position* (*).

On démontrera par des considérations analogues cet autre théorème : *Cinq droites étant tracées arbitrairement sur un plan, si l'on conçoit trois quadrilatères simples, ayant à la fois deux côtés opposés qui coïncident, pour la direction, avec deux de ces droites, et dont les autres côtés ne soient autre chose que les trois droites restantes prises deux à deux ; les points de concours des diagonales de ces trois quadrilatères appartiendront tous trois à une même droite. En outre, cette droite sera, relativement à la ligne du second ordre qui touchera les cinq droites données, la polaire du point de concours des deux d'entre elles qu'on aura prise pour direction commune des deux côtés opposés des trois quadrilatères.*

Il suit de là qu'ayant sur un plan cinq points d'une ligne du second ordre ou cinq tangentes à cette courbe, on peut toujours, en n'employant d'autre instrument que la règle, déterminer simultanément soit les tangentes en deux de ces points, soit les points de contact de deux de ces tangentes ; après quoi la construction de la courbe pourra s'achever comme on l'a fait voir ci-dessus.

(*La suite à un prochain numéro.*)

(*) C'est le théorème de la pag. 103 du tom. XV.

J. D. G.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Développement remarquable des racines et des logarithmes;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

Soit posé

$$z=\frac{x^n}{x^n+1}\text{, d'où } x=\sqrt[n]{\frac{z}{1-z}}\text{, et } \sqrt[m]{x}=\sqrt[mn]{\frac{z}{1-z}}:$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt[m]{x}=\sqrt[mn]{z}\,.\,(1-z)^{-\frac{1}{mn}} \qquad (1)$$

En remarquant que $z=1-(1-z)$, on aura

$$\sqrt[mn]{z}=1-\frac{1}{mn}(1-z)-\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn-1}{2mn}(1-z)^2-\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn-1}{2mn}\cdot\frac{2mn-1}{3mn}(1-z)^3-\ldots$$

On a d'ailleurs

$$(1-z)^{-\frac{1}{mn}}=1+\frac{1}{mn}z+\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn+1}{2mn}z^2+\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn+1}{2mn}\cdot\frac{2mn+1}{3mn}z^3+\ldots$$

En substituant donc dans (1), et remettant ensuite pour z sa valeur en x, il viendra, quel que soit n,

$$\sqrt[m]{x}=\left\{\begin{array}{l}\left\{1-\frac{1}{mn}\left(\frac{1}{x^n+1}\right)-\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn-1}{2mn}\left(\frac{1}{x^n+1}\right)^2-\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn-1}{2mn}\cdot\frac{2mn-1}{3mn}\left(\frac{1}{x^n+1}\right)^3-\ldots\right\}\\ \times\left\{1+\frac{1}{mn}\left(\frac{x^n}{x^n+1}\right)+\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn+1}{2mn}\left(\frac{x^n}{x^n+1}\right)^2+\frac{1}{mn}\cdot\frac{mn+1}{2mn}\cdot\frac{2mn+1}{3mn}\left(\frac{x^n}{x^n+1}\right)^3+\ldots\right\}\end{array}\right\}.$$

Si l'on prend pour n un nombre pair, les deux séries dont le produit compose le développement de $\sqrt[m]{x}$ seront constamment convergentes, quelque valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative qu'on donne à x.

On a aussi.

$$\text{Log.}x=\frac{1}{n}\Big\{\text{Log }z-\text{Log.}(1-z)\Big\}\,; \qquad (2)$$

mais on sait que

$$\text{Log.}z=-(1-z)-\tfrac{1}{2}(1-z)^2-\tfrac{1}{3}(1-z)^3-\tfrac{1}{4}(1-z)^4-\ldots\ldots,$$

$$-\text{Log.}(1-z)=z+\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{4}z^4+\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

substituant dans (2), et remettant ensuite pour z sa valeur en x, on aura, quel que soit n,

$$\text{Log }x=\frac{1}{n}\left\{\frac{x^n-1}{x^n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{2n}-1}{(x^n+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{3n}-1}{(x^n+1)^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{4n}-1}{(x^n+1)^4}+\ldots\right\};$$

série qui, lorsqu'on prendra pour n un nombre pair, aura le même avantage que le développement ci-dessus.

Si, en particulier, on y fait $n=2$, on retombera sur le développement déjà obtenu (tom. XIV, pag. 279).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Statique.

I DÉTERMINER l'équation de la chainette de pesanteur variable, dans laquelle la masse de chaque élément est proportionnelle à la tension qu'il éprouve, et déterminer en outre la masse de chacun de ses élémens?

II. Une corde uniformément pesante, tant qu'elle pose sur un plan horizontal, mais uniformément extensible, est suspendue librement à deux points fixes; quelle est la courbe qu'elle affectera dans le cas d'équilibre? et suivant quelle loi variera la masse de chacun de ses élémens?

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Résolution générale de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues ;

Par M. le Comte Guillaume LIBRI, de Florence.

LA résolution générale de l'équation indéterminée du premier degré, à deux inconnues, paraît avoir été trouvée pour la première fois par les Indiens. Les commentateurs de Bhasker ou Bhascara-Acharya (*), attribuent cette découverte à Arya-Bhatta, géomètre indien, que l'on croit presque contemporain de Diophante ; mais les ouvrages de cet auteur ayant été perdus, il est difficile de juger du degré de généralité qu'il avait donné à sa solution. Cependant, nous possédons le traité d'algèbre de Bramegupta (qui, d'après les calculs de M. Bentley, a été composé au commencement du septième siècle de l'ère chrétienne) où l'on trouve la résolution générale de l'équation du premier degré à deux inconnues. Cette résolution est exposée aussi dans les ouvrages de Bhascara-Acharya, et dans ceux de tous les analistes indiens

(*) Géomètre indien, de la ville de Bidder, sur la frontière septentrionale de l'Indostan, où il paraît qu'il enseignait les mathématiques, vers la fin du XII.e siècle. Voyez l'ouvrage de M. Hutton intitulé; *Tracts on Mathématical*, etc., 3 vol in-8.o, Londres, 1812.

J. D. G.

plus modernes. La méthode dont ils ont fait usage est semblable à celle que Bachet de Méziriac publia en France en 1624. On sait qu'elle consiste à réduire l'équation proposée $ax+b=cy$, à l'équation $ax_1+1=cy_1$, et à résoudre celle-ci, en cherchant le plus grand commun diviseur entre a et c.

Lagrange a résolu l'équation dont il s'agit à l'aide des fractions continues, et M. Gauss l'a réduite à sa théorie des congruences; mais toutes ces méthodes, qui dans le fond sont identiques entre elles, n'ont pas toute la généralité qu'on pourrait désirer. En effet, il est clair que les racines d'une équation à plusieurs inconnues, de même que celles d'une équation à une seule inconnue, doivent être fonctions de ses coefficiens exprimés généralement; et cependant, même pour résoudre l'équation du premier degré à deux inconnues, qui est la plus simple de toutes, il faut connaître les coefficiens en nombres, ce qui montre combien les méthodes connues sont imparfaites.

La note que nous publions ici a pour objet de donner l'expression générale des racines entières d'une équation du premier degré à deux inconnues, en fonction de ses coefficiens. Elle est extraite d'un mémoire sur la théorie des nombres, présenté à l'Académie royale des sciences de Paris, et qui doit paraître dans le recueil des *Savans étrangers*. Notre méthode s'applique à toutes les équations indéterminées; elle sert aussi à résoudre directement, et avec simplicité, les équations desquelles dépend la division du cercle, et à traiter beaucoup d'autres questions; mais ces recherches ne sont pas de nature à trouver place ici, et nous les réservons pour une autre circonstance.

Etant donné l'équation à une seule inconnue

$$(1) \qquad x^m-1=0,$$

si l'on représente par P_n, P_{n-m}, P_{n-2m}, P_{n-3m}, ... les sommes des

puissances $n.^{\text{ièmes}}$, $(n-m)^{\text{ièmes}}$, $(n-2m)^{\text{ièmes}}$, $(n-3m)^{\text{ièmes}}$, ... de ses racines, on aura

$$P_n = P_{n-m} = P_{n-2m} = P_{n-3m} = \ldots\ldots ;$$

de sorte que, si n est un multiple de m, on obtient $P_n = m$; et, dans le cas contraire, on trouve $P_n = 0$. En exprimant les racines de l'équation (1) en fonctions circulaires, on aura

$$P_n = \left\{ \begin{array}{l} \left(\text{Cos.}\frac{0.\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{0\pi}{m}\right)^n \\ + \left(\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{m}\right)^n \\ + \left(\text{Cos.}\,\frac{4\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{4\pi}{m}\right)^n \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left(\text{Cos.}\,\frac{2u\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2u\pi}{m}\right)^n \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left(\text{Cos.}\,\frac{2(m-1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)^n \end{array} \right\}.$$

Si l'on transforme le second membre, au moyen de la relation connue $(\text{Cos}.z + \sqrt{-1}\text{Sin}.z)^n = \text{Cos}.nz + \sqrt{-1}\text{Sin}.nz$, et qu'on néglige les imaginaires qui, dans le cas actuel, doivent nécessairement se détruire, on obtiendra

$$P_n = \text{Cos.}\,\frac{on\pi}{m} + \text{Cos.}\,\frac{2n\pi}{m} + \text{Cos.}\,\frac{4n\pi}{m} + \ldots + \text{Cos.}\,\frac{2u.n\pi}{m} + \ldots + \text{Cos.}\,\frac{2(m-1)n\pi}{m},$$

c'est-à-dire;

$$(2)\quad P_n=\sum_{u=0}^{u=m}\text{Cos.}\,\frac{2un\varpi}{m}=\frac{\text{Sin.}2\left(n-\frac{n}{2m}\right)\varpi+\text{Sin.}\frac{n\varpi}{m}}{2\text{Sin.}\frac{n\varpi}{m}}\quad (*).$$

et la valeur de cette expression sera m ou zéro, suivant que le nombre $\frac{n}{m}$ sera entier ou fractionnaire.

On sait qu'étant proposé de résoudre l'équation $ax+b=cy$, en nombres entiers, il suffit de trouver une valeur α de x, comprise entre zéro et c, car les autres s'en déduisent en ajoutant à celle-là un multiple quelconque de c; de sorte qu'on a, en général, $x=\alpha+cz$, z étant un nombre entier quelconque.

Maintenant il faut observer que si, dans l'équation (2), on fait $n=ax+b$, $m=c$, et que l'on donne à x successivement toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ... $c-1$, on obtiendra l'intégrale

$$\sum_{x=0}^{x=c}\left\{\text{Cos.}\frac{0(ax+b)\varpi}{c}+\text{Cos.}\frac{2(ax+b)\varpi}{c}+\ldots+\text{Cos.}\frac{2u(ax+b)\varpi}{c}+\ldots+\text{Cos.}\frac{2(c-1)(ax+b)\varpi}{c}\right\},$$

qui aura pour valeur c répété autant de fois que la quantité $\frac{ax+b}{c}$ a de valeurs entières, lorsqu'on y fait x égal à un nombre entier moindre que c; d'où il suit que la formule

$$(3)\quad \frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\left\{\text{Cos.}\frac{0(ax+b)\varpi}{c}+\text{Cos.}\frac{2(ax+b)\varpi}{c}+\ldots+\text{Cos.}\frac{2u(ax+b)\varpi}{c}\right.$$
$$\left.+\ldots+\text{Cos.}\frac{2(c-1)(ax+b)\varpi}{c}\right\};$$

(*) Voy. entre autres, l'*Introduction à l'analise infinitésimale* d'Euler, tom. I, chap. XIV, n.° 260.

J. D. G.

exprimera le nombre des solutions de l'équation $ax+b=cy$, en supposant qu'on ne prenne pour x que des nombres entiers plus petits que c.

Si l'on considère le terme général de la série (3), on aura l'équation

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\text{Cos.}\frac{2u(ax+b)\varpi}{c}=\frac{\text{Sin.}\frac{2u}{c}(b+ac-\frac{1}{2}a)\varpi-\text{Sin.}\frac{2u}{c}(b-\frac{1}{2}a)\varpi}{2c\text{Sin.}\frac{u.a\varpi}{c}},$$

dans le second membre de laquelle le numérateur est toujours zéro ; mais dont le dénominateur ne peut se réduire à zéro que lorsque a et c ont un diviseur commun, plus grand que l'unité, puisque u est toujours plus petit que c. Il résulte de là que, si a et c sont premiers entre eux, tous les termes de la série (3) s'évanouissent, excepté le premier, dont la valeur se réduit à

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\text{Cos.}\frac{0(ax+b)\pi}{c}=\frac{c}{c}=1.$$

Mais, si a et c ont un facteur commun g, on supposera $a=mg$, $c=ng$, et, en faisant $u=n$, on obtiendra

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\text{Cos.}\frac{2n(ax+b)\varpi}{c}=\frac{\text{Sin.}\frac{2n}{c}(b+ac-\frac{1}{2}a)\varpi-\text{Sin.}\frac{2n}{c}(b-\frac{1}{2}a)\varpi}{2c.\text{Sin.}\frac{na\varpi}{c}}$$

$$=\frac{\text{Sin.}\frac{2(b+ang-\frac{1}{2}a)\varpi}{g}-\text{Sin.}\frac{2(b-\frac{1}{2}a)\varpi}{g}}{2ng.\text{Sin.}\frac{a\varpi}{g}}.$$

Cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$, en vertu de l'hypothèse $a=mg$.

On devra donc différentier le numérateur et le dénominateur par rapport à a, pour en avoir la valeur déterminée, et l'on trouvera

$$\frac{\text{Sin.}2(b+ang-\tfrac{1}{2}a)\frac{\varpi}{g}-\text{Sin.}2(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{\varpi}{g}}{2ng.\text{Sin.}\frac{a\varpi}{g}}$$

$$=\frac{2(ng-\tfrac{1}{2})\frac{\varpi}{g}\text{Cos.}2(b+ang-\tfrac{1}{2}a)\frac{\varpi}{g}+\frac{\varpi}{g}\text{Cos.}2(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{\varpi}{g}}{2ng.\frac{\varpi}{g}.\text{Cos.}\frac{a\varpi}{g}}$$

$$=\frac{2ng\varpi.\text{Cos.}2(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{\varpi}{g}}{2ng\varpi.\text{Cos.}\frac{a\pi}{g}}=\frac{\text{Cos.}2(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{\pi}{g}}{\text{Cos.}\frac{a\pi}{g}}$$

$$=\frac{\text{Cos.}2\left(b-\frac{mg}{2}\right)\frac{\varpi}{g}}{\text{Cos.}m\varpi}=\frac{\text{Cos.}\frac{2b\pi}{g}.\text{Cos.}m\varpi+\text{Sin.}\frac{2b\pi}{g}.\text{Sin.}m\varpi}{\text{Cos.}m\varpi}$$

$$=\text{Cos.}\frac{2b\varpi}{g}.$$

Si, au lieu de prendre $u=n$, on fait, en général, $u=en$, e étant un nombre entier quelconque, on trouve

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\text{Cos.}2en.\frac{ax+b}{c}\varpi=\text{Cos.}\frac{2eb\pi}{g};$$

et, comme le nombre n est compris $g-1$ fois dans $c-1$, on pourra faire successivement $e=0, 1, 2, 3, \ldots. g-1$; et la valeur de l'intégrale (3) sera exprimée (dans le cas actuel, où l'on suppose que a et c ont un commun diviseur g) par la série

$$1+\text{Cos.}\frac{2b\pi}{g}+\text{Cos.}\frac{4b\pi}{g}+\ldots+\text{Cos.}\frac{2(g-1)\pi}{g},$$

dont la somme

$$\frac{\text{Sin.}2\left(b-\frac{1}{2}\frac{b}{g}\right)\varpi+\text{Sin.}\frac{b\pi}{g}}{2\text{Sin.}\frac{b\pi}{g}},$$

a pour valeur g; lorsque $\frac{b}{g}$ est un nombre entier, et se réduit à zéro, dans le cas contraire.

De là résulte 1.° que l'équation $ax+b=cy$ a toujours une solution entière, et plus petite que c, lorsque a et c n'ont d'autres diviseurs communs que l'unité;

2.° Que si a et c ont un commun diviseur g, différent de l'unité, qui ne divise point b, cette équation n'admet aucune solution entière;

3.° Qu'enfin, si $\frac{b}{g}$ est un nombre entier, on trouvera pour x un nombre g de valeurs entières, plus petites que c, qui satisferont à l'équation proposée.

Puisque l'intégrale (3) représente le nombre des solutions entières de l'équation $ax+b=cy$, en prenant pour x des valeurs moindres que c, il est clair que la formule

$$(4)\quad \frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}x\left\{\text{Cos.}\frac{0(ax+b)\pi}{c}+\text{Cos.}\frac{2(ax+b)\pi}{c}+\ldots+\text{Cos.}\frac{2u(ax+b)\pi}{c}+\ldots+\text{Cos.}\frac{2(c-1)(ax+b)\pi}{c}\right\}$$

$$=\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}x\left\{1+\text{Cos.}2\left(\frac{ax+b}{c}\right)\varpi+\ldots+\text{Cos.}2u\left(\frac{ax+b}{c}\right)\varpi+\ldots+\text{Cos.}2(c-1)\left(\frac{ax+b}{c}\right)\varpi\right\}$$

exprimera la somme des valeurs de x, entières et moindres que

c, qui satisfont à l'équation $ax+b=cy$, lorsqu'elle est résoluble et que, lorsqu'elle ne l'est pas, cette intégrale se réduit à zéro.

Nous avons démontré que, si a et c ont un facteur commun, différent de l'unité, qui ne divise pas b, l'équation $ax+b=cy$ n'admet aucune solution entière, et comme, si ce facteur commun divise aussi b, on peut toujours le supprimer, il sera permis dans en cas, de supposer que a et c sont premiers entre eux; et alors on sera assuré qu'il existe toujours une valeur entière de x, comprise entre zéro et c, qui satisfait à l'équation dont il s'agit, et qu'il n'en existe qu'une seule.

Actuellement, pour trouver cette valeur de x, on considérera le terme général de l'intégrale (4), et on aura

$$(5)\qquad \frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c} x.\text{Cos}.2u\frac{ax+b}{c}\varpi$$

$$=\frac{(c-1)\text{Sin}.2u(b+ca-\frac{1}{2}a)\frac{\pi}{c}-\text{Sin}.2u(b+\frac{1}{2}a)\frac{\pi}{c}}{2c\text{Sin}.\frac{ua\pi}{c}}$$

$$+\frac{\text{Cos}.2u(ca+b-a)\frac{\pi}{c}-\text{Cos}.2u(b+a)\frac{\pi}{c}}{c\left(2\text{Sin}.\frac{ua\pi}{c}\right)^2}.$$

Il faudra faire successivement $u=1, 2, 3, \ldots (c-1)$, et ajouter au résultat le premier terme de la série (4) qui est

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c} x=\frac{c(c-1)}{2c}=\frac{c-1}{2}.$$

Puisque a et c sont premiers entre eux, et que u est plus petit que c, il s'ensuit que le dénominateur $2c\text{Sin}.\frac{ua\pi}{c}$ du second

membre de l'équation (5) ne pourra jamais s'évanouir ; on obtiendra, par conséquent, en faisant les réductions nécessaires,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(c-1)\text{Sin.}\,2u(b+ca-\frac{1}{2}a)\frac{\varpi}{c}-\text{Sin.}\,2u(b+\frac{1}{2}a)\frac{\varpi}{c}}{2c.\,\text{Sin.}\,\frac{ua\varpi}{c}} \\ +\dfrac{\text{Cos.}\,2u(b+ca-a)\frac{\varpi}{c}-\text{Cos.}\,2u(b+a)\frac{\varpi}{c}}{c\left(2\text{Sin.}\,\frac{ua\varpi}{c}\right)^2}\end{array}\right\}=\frac{\text{Sin.}\,2u(b-\frac{1}{2}a)\frac{\varpi}{c}}{2\text{Sin.}\,\frac{ua\varpi}{c}}$$

et partant

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}x\left\{1+\text{Cos.}\,2\left(\frac{ax+b}{c}\right)\varpi+\text{Cos.}\,4\left(\frac{ax+b}{c}\right)\varpi+\ldots+\text{Cos.}\,2u\left(\frac{ax+b}{c}\right)\varpi+\ldots+\text{Cos.}\,2(c-1)\left(\frac{ax+b}{c}\right)\varpi\right\}$$

$$=\frac{c-1}{2}+\frac{\text{Sin.}\,2(b-\frac{1}{2}a)\frac{\varpi}{c}}{2\text{Sin.}\,\frac{a\varpi}{c}}+\frac{\text{Sin.}\,4(b-\frac{1}{2}a)\frac{\varpi}{c}}{2\text{Sin.}\,\frac{2a\varpi}{c}}+\ldots+\frac{\text{Sin.}\,2u(b-\frac{1}{2}a)\frac{\varpi}{c}}{2\text{Sin.}\,\frac{ua\varpi}{c}}+\ldots+\frac{\text{Sin.}\,2(c-1)(b-\frac{1}{2}a)\frac{\varpi}{c}}{2\text{Sin.}\,\frac{(c-1)a\varpi}{c}}$$

$$=\frac{c-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=c}\frac{\text{Sin.}\,2u(b-\frac{1}{2}a)\frac{\varpi}{c}}{\text{Sin.}\,\frac{ua\varpi}{c}}=\alpha\,.$$

Cette formule très-simple donne pour α la plus petite valeur de x qui satisfasse à l'équation $ax+b=cy$, en nombres entiers ; et toutes les autres valeurs sont exprimées par l'équation $x=\alpha+cz$, z étant un nombre entier quelconque.

Soit proposé, par exemple, de résoudre en nombres entiers, l'équation

$$3x+1=4y\ ;$$

on aura, en comparant à l'équation générale $ax+b=cy$

$$a=3\ ,\ b=1\ ,\ c=4\ ;$$

et par conséquent

$$\alpha=\frac{4-1}{2}+\tfrac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=4}.\frac{\text{Sin}.2u(1-\frac{3}{2})\frac{\pi}{4}}{\text{Sin}.\frac{3u\pi}{4}}=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=4}.\frac{\text{Sin}.u\frac{\pi}{4}}{\text{Sin}.3u\frac{\pi}{4}}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\alpha=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{Sin}.\frac{\pi}{4}}{\text{Sin}.\frac{3\pi}{4}}+\frac{\text{Sin}.\frac{2\pi}{4}}{\text{Sin}.\frac{6\pi}{4}}+\frac{\text{Sin}.\frac{3\pi}{4}}{\text{Sin}.\frac{9\pi}{4}}\right\}=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}(1-1+1)=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{2}{2}=1\ ;$$

et toutes les valeurs de x qui résolvent l'équation $3x+1=4y$ seront données par l'équation $x=1+4z$, comme on le sait d'ailleurs.

La valeur de α peut, en général, se calculer à l'aide des tables du sinus. Il est vrai que, par ce moyen, on n'obtiendra, le plus souvent, que des valeurs fractionnaires approchées ; mais comme, d'après ce qui précède, x ne peut avoir que des valeurs entières, on en trouvera la valeur exacte en substituant à cette valeur approchée le nombre entier le plus voisin.

On peut observer que, puisqu'on a

$$\frac{\text{Sin}.(2b-a)\frac{u\pi}{c}}{\text{Sin}.\frac{au\pi}{c}}=\frac{\text{Sin}.\frac{2bu\pi}{c}.\text{Cos}.\frac{au\pi}{c}-\text{Cos}.\frac{2bu\pi}{c}.\text{Sin}.\frac{au\pi}{c}}{\text{Sin}.\frac{au\pi}{c}}$$

$$=\text{Sin}.\frac{2bu\pi}{c}.\text{Cot}.\frac{au\pi}{c}-\text{Cos}.\frac{2bu\pi}{c}\ ,$$

et que d'ailleurs

$$\sum_{u=1}^{x=c}\text{Cos}.\frac{2bu\pi}{c}=-1\ ,$$

on pourra écrire

$$\alpha=\frac{c-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=c}.\text{Sin}.\frac{2bu\varpi}{c}\text{Cot}.\frac{au\varpi}{c}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{c+\sum_{u=1}^{u=c}\text{Sin}\,\frac{2bu\varpi}{c}.\text{Cot}.\frac{au\varpi}{c}\right\}.$$

On pourra faire usage de cette expression, aussi bien que de la précédente, pour résoudre l'équation proposée (*).

OPTIQUE.

Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques;

Par M. Gergonne.

A la page 14 du présent volume, nous exprimions le vœu de pouvoir offrir à nos lecteurs une démonstration du principe fondamental de la théorie des surfaces caustiques par réfraction aussi simple que celle qui a été donnée par M. Dupin, pour les surfaces caustiques par réflexion. Un article de M. Timmermans, professeur de Mathématiques au collége royal de Gand, inséré dans la *Correspondance mathématique et physique* du royaume des Pays-Bas (tom. I, n.° 6, pag. 336), recueil encore trop peu répandu en France, nous met en situation de remplir ce vœu au-delà de nos espérances. L'auteur tourne un peu court, il est vrai,

---

(*) Ces formules, étendues à un nombre quelconque d'équations du premier degré, entre un grand nombre d'inconnues, compléteraient la théorie exposée à la page 147 du III.e volume du présent recueil.

J. D. G.

et sa démonstration n'est relative qu'aux courbes planes ; mais il y a très-peu à faire pour l'étendre aux surfaces courbes, et pour lui donner en même temps tous les développemens qui semblent lui manquer encore ; et tel est le but que nous nous proposons ici.

Soient deux surfaces courbes quelconques, situées comme on voudra, l'une par rapport à l'autre, mais absolument fixes dans l'espace. Concevons deux sphères concentriques, mobiles et variables de rayon, mais de manière pourtant que leurs rayons conservent toujours entre eux un rapport constant; et supposons que ces sphères se meuvent et varient de grandeur dans l'espace, de manière à être constamment et respectivement tangentes aux deux surfaces dont il s'agit; leur centre commun engendrera une troisième surface, dont il s'agit d'assigner les relations avec les deux autres.

Supposons, en premier lieu, que les deux surfaces données soient des surfaces planes, que nous représenterons respectivement par p et p'; il est aisé de voir qu'alors la troisième P sera aussi une surface plane, passant par l'intersection des deux premières. Soient, en effet, pour une situation et une grandeur quelconque des deux sphères, M leur centre commun, m et m' leurs points de contact respectifs avec les deux plans p et p'; de telle sorte que Mm et Mm' soient des rayons de ces deux sphères; rayons dont le rapport est supposé constant. Par ce centre M et par la commune section des deux plans p et p', soit conduit un troisième plan P, sur lequel soit pris arbitrairement un point M_1. De ce point soient abaissées des perpendiculaires M_1m_1 et $M_1m'_1$ sur les plans p et p'; ces perpendiculaires seront respectivement parallèles à Mm et Mm'. En désignant donc par I le point où la droite MM_1 rencontre la commune section des trois plans p, p', P, on aura

$$\frac{Mm}{M_1m_1}=\frac{IM}{IM_1}, \qquad \frac{Mm'}{M_1m'_1}=\frac{IM}{IM_1};$$

et, par suite,

$$\frac{Mm}{M_1m_1}=\frac{Mm'}{M_1m'_1}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{M_1m_1}{M_1m'_1}=\frac{Mm}{Mm'};$$

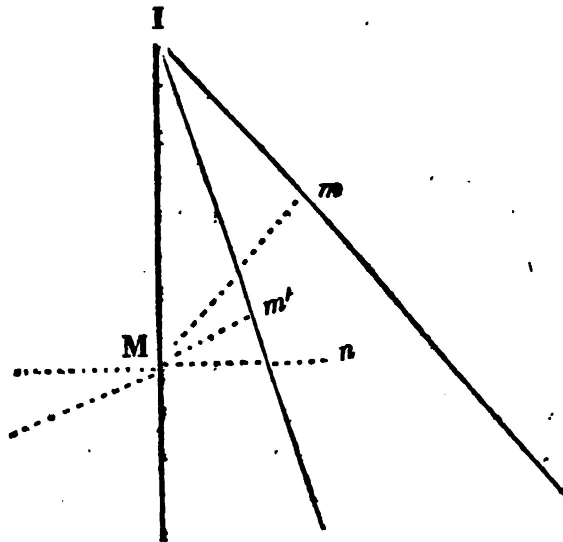
donc, si du point M_1, pris pour centre commun, et avec les rayons M_1m_1 et $M_1m'_1$, on décrit deux sphères concentriques; ces sphères seront respectivement tangentes aux deux plans p et p', et auront leurs rayons dans le rapport constant donné: elles seront donc une des situations de nos deux sphères variables de situation et de grandeur dans l'espace; d'où l'on voit que tous les points M_1 du plan P seront des centres de tels systèmes de sphères: et il est de plus aisé de voir qu'ils le seront exclusivement à tous les autres points de l'espace.

Supposons présentement que les deux surfaces fixes données soient quelconques; désignons-les par s et s'; et soit S la surface inconnue lieu des centres des systèmes de sphères. Soit M, sur cette surface S, une des situations du centre commun; soient, pour cette situation, m et m', respectivement, les points de contact de ces deux sphères avec les surfaces s et s'. Pour un changement infiniment petit dans la situation de ce centre commun, et par suite dans la grandeur des sphères, on pourra substituer aux deux surfaces s et s' leurs plans tangens p et p' en m et m'; et alors, par ce qui a été prouvé ci-dessus, le centre commun M pourra être réputé se mouvoir sur un plan P passant par l'intersection des deux autres. Ce plan P est donc le plan tangent en M à la surface S décrite pas ce centre commun. Ainsi, dans toutes les situations du centre commun des deux sphères, les plans tangens P, p, p' aux surfaces S, s, s', aux points M, m, m', se coupent suivant une même droite, variable de situation comme le point M.

Concevons, par le point M, un plan Π, perpendiculaire à cette

droite, cette droite lui sera réciproquement perpendiculaire ; les plans P, p, p', où elle se trouve également contenue, seront donc aussi perpendiculaires au plan Π ; d'où il résulte que les rayons Mm et Mm', perpendiculaires respectivement aux plans p et p', et conséquemment normaux aux surfaces s et s', seront dans ce plan, et qu'il en sera de même de la perpendiculaire Mn menée, par le point M, au plan P, normale à la surface S en ce point.

Soit I le point où l'intersection des trois plans P, p, p' est coupée par le plan Π, et considérons ce qui se passe dans ce dernier plan. On a



$$\text{Sin}.nMm = \text{Sin}.mIM = \frac{Mm}{IM},$$

$$\text{Sin}.nMm' = \text{Sin}.m'IM = \frac{Mm'}{IM};$$

donc

$$\frac{\text{Sin.}n\text{M}m}{\text{Sin.}n\text{M}m'}=\frac{\text{M}m}{\text{M}m'};$$

puis donc que le second membre de cette dernière équation est supposé constant, pour toutes les grandeurs et situations du système des deux sphères, le premier doit l'être également. La propriété caractéristique de la surface, lieu des centres du système des deux sphères, peut donc être énoncée comme il suit :

Si deux sphères concentriques, mobiles dans l'espace, de rayon variable, mais dont les rayons sont d'ailleurs dans un rapport constant, se meuvent de manière à être respectivement et constamment tangentes à deux surfaces fixes données quelconques ; le lieu de leur centre commun sera une troisième surface telle que si, de l'un quelconque de ses points, on mène des normales aux deux autres surfaces, ces normales seront dans un même plan avec la normale menée par le même point à la surface lieu des centres : en outre, les sinus des angles formés par les deux premières normales avec celle-là, seront respectivement dans le rapport constant des rayons des deux sphères (*).

Si donc on suppose que la surface S soit la surface séparatrice de deux milieux, pour lesquels les sinus d'incidence et de réfraction soient dans le rapport constant des rayons des deux sphères, et que les rayons incidens soient tous normaux à la surface s, les rayons réfractés seront tous normaux à la surface s'. On a donc ce théorème :

Deux milieux homogènes, d'un pouvoir réfringent inégal, étant séparés l'un de l'autre par une surface de nature quelconque, et des rayons de lumière pénétrant de l'un de ces milieux dans l'au-

---

(*) MM. les Rédacteurs de la *Correspondance* avertissent dans une note, que M. Timmermans était en possession de ce théorème, avant d'avoir eu connaissance de l'article de la page 345 de notre XV.e volume.

tre ; si les rayons incidens sont dirigés dans l'espace de manière à pouvoir être traversés orthogonalement par une même surface, les rayons réfractés seront aussi dirigés dans l'espace de manière à pouvoir être traversés orthogonalement par une même surface, et réciproquement : en outre, à chaque surface trajectoire orthogonale des rayons incidens, il répond toujours une surface trajectoire orthogonale des rayons réfractés telle que, de quelque point de la surface séparatrice des deux milieux que l'on mène des normales à ces deux autres surfaces, les longueurs de ces normales seront respectivement entre elles dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

Il a déjà été observé plusieurs fois, et notamment à la page 14 du présent volume, que la réflexion n'était qu'un cas particulier de la réfraction, savoir : celui où les sinus d'incidence et de réfraction ne diffèrent que par le signe ; donc, ce qui précède renferme implicitement toute la théorie des surfaces caustiques par réflexion.

Il a aussi été observé, page 15, que la théorie des caustiques planes, soit par réfraction soit par réflexion, n'était qu'un cas particulier de celles des surfaces caustiques : donc le peu qu'on vient de lire renferme implicitement toute la théorie des caustiques planes et surfaces caustiques, soit par réfraction soit par réflexion.

Jetons présentement un regard en arrière ; reportons-nous par la pensée au point de départ des géomètres, dans la théorie qui nous occupe ; et mesurons rapidement l'espace qu'ils ont parcouru. Tschirnausen remarque le premier, en 1682, la caustique plane formée par des rayons parallèles réfléchis dans le cercle, et se propose d'en rechercher l'équation. Ce problème, qui n'est plus aujourd'hui qu'un jeu, était alors fort difficile ; il en donne une solution reconnue fausse par Cassini, Mariotte et de la Hire, commissaires de l'Académie royale des sciences de Paris. Cet essai infructueux éveille l'attention des géomètres sur ces sortes de courbes, que l'on aperçoit bientôt devoir donner la véritable clef de

tous les mystères de l'optique. Les Bernouilli, l'Hôpital, Carré et quelques autres en font tour-à-tour l'objet spécial de leurs recherches, et donnent des méthodes générales pour obtenir l'équation d'une caustique plane quelconque, soit par réflexion soit par réfraction.

Malus, en 1810, s'occupe le premier de la théorie générale des surfaces caustiques, et trouve quelques beaux théorèmes; mais des erreurs de calcul, résultat presque inévitable d'une analise trop compliquée, l'entraînent à dénier à ces théorèmes la généralité qu'ils comportaient réellement. M. Dupin, en 1822, reprend la théorie de Malus, pour lui donner le complément qui lui manquait, et en 1823, d'une analise, également fort compliquée, (*Annales*, tom. XIV, pag. 129), nous déduisons *la possibilité de remplacer, pour des rayons originairement normaux à une même surface quelconque, l'effet d'un nombre quelconque de réfractions et de réflexions, soit par une réfraction soit par une réflexion unique.*

Des recherches relatives à quelques cas spéciaux de réflexion et de réfraction (*Annales*, tom. V, pag. 283, tom. XI, pag. 229, et tom. XIV, pag. 1), nous avaient conduits, dès 1815, à soupçonner que, le plus souvent, *des caustiques fort compliquées pourraient très-bien n'être que les développées d'autres courbes beaucoup plus simples*: en 1825, M. Sturm, en caractérisant la courbe dont la caustique relative au cercle est la développée (*Annales*, tom. XV, pag. 205), donne un nouveau poids à cette conjecture. Presque en même temps, M. Quetelet publie, sur les caustiques planes, en général (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences* de Bruxelles, tom. III, pag. 89), d'élégans théorèmes, dont ceux de M. Sturm ne deviennent plus dès lors que des cas particuliers. Après avoir démontré ces théorèmes par l'analise (tom. XV, pag. 345), nous les étendons, et M. Sarrus, presque en même temps que nous, aux surfaces caustiques, à la page 1.re du présent volume; ou plutôt, nous donnons un théorème simple et général qui renferme à lui seul toute la théorie des caus-

tiques et surfaces caustiques, tant par réfraction que par réflexion. Il restait seulement à désirer une démonstration simple de ce théorème, et voilà que M. Timmermans en produit une qui l'est à tel point qu'elle peut être introduite dans l'enseignement même le plus élémentaire, et qu'on a seulement lieu d'être surpris que, dans l'intervalle de près d'un siècle et demi, tant de géomètres aient réuni tant d'efforts et fait tant de dépense de calcul, pour parvenir finalement à un résultat qu'ils avaient, pour ainsi dire, sous la main. Sauf les applications, qui offriront toujours des difficultés pratiques, cette théorie peut être présentement regardée comme tout-à-fait close ; mais il fallait passer par ces divers détours pour l'amener à ce point; car, en toutes choses, ce qu'il y a de plus général et de plus simple, à la fois, est d'ordinaire ce qui se présente en dernier lieu à la pensée. Bien d'autres théories encore attendent un semblable perfectionnement des efforts réunis des géomètres; et ils ne sauraient servir plus utilement la science qu'en dirigeant leurs méditations vers un objet aussi important. Au point où nous sommes parvenus aujourd'hui, nous avons, en effet, beaucoup moins besoin de créer de nouvelles théories que de réduire à leurs moindres termes, s'il est permis de s'exprimer ainsi, les théories déjà connues.

GÉOMÉTRIE DES SURFACES COURBES.

Démonstration d'une proprieté générale des lignes de contact des surfaces courbes avec les surfaces coniques circonscrites ;

Par M. F. Vallès, élève à l'Ecole royale polytechnique.



Dans tous les traités analitiques des surfaces du second ordre, on démontre que *la ligne de contact de ces sortes de surfaces avec la surface conique circonscrite est une courbe plane ;* mais cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale que nous allons démontrer, et qu'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME. La ligne de contact d'une surface d'un ordre quelconque avec la surface conique circonscrite, appartient toujours à une surface d'un ordre inférieur.

Démonstration. Soit une surface d'un ordre quelconque à laquelle on ait circonscrit une surface conique, ayant son sommet situé où l'on voudra, par rapport à cette première surface. Soit pris ce sommet pour origine des coordonnées, auxquelles nous supposons d'ailleurs une direction quelconque. Les équations de l'un des élémens de la surface conique seront de la forme

$$x=Mz\ , \qquad y=Nz\ ;$$

et, pour que cette droite ne puisse pas être une quelconque des droites menées par l'origine, il sera nécessaire qu'il existe entre M

et N une certaine relation que nous représenterons par l'équation

$$F(M,N)=0 ,$$

dans laquelle mettant pour M et N les valeurs données par les deux équations précédentes, on obtiendra, pour l'équation générale, des surfaces coniques ayant leur sommet à l'origine

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0 ,$$

équation qui, résolue par rapport à $\frac{y}{z}$ deviendra

$$\frac{y}{z}=f\left(\frac{x}{z}\right) ;$$

dans laquelle f désigne une fonction tout-à-fait arbitraire.

Les deux différentielles partielles de cette équation, prises tour-à-tour par rapport à x et y, sont

$$-py=(z-px)f'\left(\frac{x}{z}\right), \quad z-qy=-qxf'\left(\frac{x}{z}\right),$$

où p et q représentent, à l'ordinaire, les deux coefficiens différentiels partiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$.

En multipliant ces dernières équations en croix et réduisant, on obtiendra, pour l'équation différentielle partielle générale des surfaces coniques qui ont leur sommet à l'origine

$$(z-px)(z-qy)=pqxy ,$$

ou bien en développant, réduisant et divisant par z,

$$z=px+qy \quad . \qquad (1)$$

Cela posé, supposons que la surface à laquelle cette surface conique est circonscrite soit de l'ordre m, et soit son équation

$$\varphi(x,y,z)=V=0 \qquad (2)$$

ses deux équations différentielles partielles seront

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0 \;, \qquad \frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dz}\,\frac{dz}{dy}=0 \;;$$

or, si l'on veut que la surface conique lui soit circonscrite, il faudra qu'en leurs points communs elles aient le même plan tangent et qu'on ait conséquemment

$$\frac{dz}{dx}=p \;, \qquad \frac{dz}{dy}=q \;,$$

ce qui changera les deux équations différentielles partielles en celles-ci

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dz}p=0 \;, \qquad \frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dz}q=0 \;. \qquad (3)$$

Eliminant donc p et q, entre les équations (1) et (3), on obtiendra, pour une des équations de la ligne de contact des deux surfaces

$$x\frac{dV}{dx}+y\frac{dV}{dy}+z\frac{dV}{dz}=0 \;; \qquad (4)$$

tandis que l'autre équation de cette même ligne sera évidemment l'équation (2).

Mais quand une ligne est donnée dans l'espace par les équations de deux surfaces, dont elle est l'intersection, elle est tout aussi bien donnée par l'intersection de l'une de ces surfaces avec une autre dont l'équation serait une combinaison quelconque des équations de ces deux-là. Tout se réduit donc à prouver que, de la combinaison des deux équations

$$V=0\,,\qquad x\frac{dV}{dx}+y\frac{dV}{dy}+z\frac{dV}{dz}=0\,,$$

on peut en déduire une troisième d'un ordre inférieur à l'ordre m.

Pour cela représentons généralement par

$$Ax^{\alpha}y^{\beta}z^{m-\alpha-\beta}$$

un quelconque des termes de l'ordre m de l'équation $V=0$, α et β pouvant avoir toutes les valeurs positives possibles, depuis zéro jusqu'à $\alpha+\beta=m$. Les dérivées successives de ce terme, par rapport à x, y, z seront respectivement

$$\alpha Ax^{\alpha-1}y^{\beta}z^{m-\alpha-\beta}\,,\quad \beta Ax^{\alpha}y^{\beta-1}z^{m-\alpha-\beta}\,,\quad (m-\alpha-\beta)Ax^{\alpha}y^{\beta}z^{m-\alpha-\beta-1}.$$

Pour savoir ce que ce terme produira dans l'équation (4), il faudra prendre la somme des produits de ces trois dérivées par x, y et z, ce qui donnera simplement

$$mAx^{\alpha}y^{\beta}z^{m-\alpha-\beta}\,,$$

c'est-à-dire, ce terme lui-même multiplié simplement par m. Quant aux termes des ordres inférieurs, contenus dans l'équation $V=0$, il est manifeste qu'ils n'introduiront que des termes d'ordre inférieur à m dans l'équation (4), de sorte que cette équation contiendra tous les termes de l'ordre m de l'équation $V=0$, multipliés simplement par m.

Donc, si de cette équation (4) on retranche le produit par m, de l'équation $V=0$, tous les termes de l'ordre m disparaîtront de l'équation résultante, qui sera ainsi une équation d'un ordre inférieur à m; mais ce sera aussi l'équation d'une surface qui contiendra la ligne de contact de la surface conique avec la surface de l'ordre m à laquelle elle est circonscrite; donc il est vrai de dire, comme l'annonce le théorème, que cette ligne de contact appartient à une surface d'un ordre inférieur à celui de la surface à laquelle la surface conique se trouve circonscrite. Donc, en particulier, cette ligne de contact est une courbe plane, si la surface conique est circonscrite à une surface du second ordre.

Cette proposition étant indépendante de la distance du sommet de la surface conique à la surface à laquelle elle se trouve circonscrite, elle aura lieu également lorsque ce sommet en sera infiniment distant. Notre théorème conduit donc à ce corollaire.

Corollaire. La ligne de contact d'une surface d'un ordre quelconque avec une surface cylindrique qui lui est circonscrite appartient toujours à une surface d'un ordre inférieur.

Par des raisonnemens et des calculs analogues, on démontrera le théorème suivant :

THÉORÈME. Les points de contact d'une courbe plane d'un ordre quelconque avec toutes les tangentes qui peuvent lui être menées d'un même point quelconque de son plan, sont tous situés sur une courbe d'un ordre inférieur au sien.

Démonstration. Soit pris le point d'où sont issues toutes les tangentes pour origine des coordonnées, auxquelles nous supposerons d'ailleurs une direction quelconque, et soit alors

$$\varphi(x, y) = V = 0 \qquad (1)$$

l'équation de la courbe dont il s'agit, que nous supposons de l'ordre m. Toute droite menée par l'origine aura une équation de la forme

$$y=Mx\,; \qquad (2)$$

mais en différentiant l'équation de la courbe dont il s'agit, on obtient

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dy}\,\frac{dy}{dx}=0\,.$$

Afin donc que la droite menée par l'origine lui soit tangente, il faudra qu'on ait

$$\frac{dy}{dx}=M$$

ce qui donnera

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dy}M=0\,; \qquad (3)$$

éliminant donc M entre les équations (2) et (3), on obtiendra, pour l'équation d'une courbe qui contiendra tous les points de contact

$$x\frac{dV}{dx}+y\frac{dV}{dy}=0\,. \qquad (4)$$

Cette équation, combinée avec l'équation (1), donnera les points de contact dont il s'agit.

Mais, quand des points sont donnés sur un plan, par l'intersection de deux courbes, ils sont tout aussi bien donnés par l'intersection de l'une d'elles avec une autre dont l'équation serait une combinaison quelconque des équations de ces deux-là. Tout se réduit donc à prouver que, de la combinaison des deux équations

$$V=0\,, \quad x\frac{dV}{dx}+y\frac{dV}{dy}=0\,.$$

on en peut déduire une troisième d'un ordre inférieur à m.

Or, soit représenté généralement par

$$Ax^{\alpha}y^{m-\alpha}$$

un quelconque des termes de l'ordre m de l'équation $V=0$, α pouvant avoir toutes les valeurs positives possibles, de zéro à m; les dérivées de ce terme, par rapport à x et y seront respectivement

$$\alpha Ax^{\alpha-1}y^{m-\alpha}\,,\quad (m-\alpha)Ax^{\alpha}y^{m-\alpha-1}\,.$$

En prenant la somme de leurs produits par x et y, le résultat

$$mAx^{\alpha}y^{m-\alpha}\,,$$

sera ce que ce terme aura fourni, dans la formation de l'équation (4); et, comme il est manifeste que les termes des ordres inférieurs, contenus dans l'équation $V=0$, n'introduiront que des termes d'ordre inférieur à m, dans l'équation (4); il s'ensuit que cette équation (4) contiendra exactement tous les termes de l'ordre m de l'équation $V=0$, multipliés simplement par m.

Donc, si, de cette équation (4), on retranche m fois l'équation $V=0$, tous les termes de l'ordre m disparaîtront de l'équation résultante, qui sera conséquemment d'un ordre inférieur à m; mais ce sera l'équation d'une courbe qui contiendra tous les points de contact; donc, comme l'annonce le théorème, ces points de contact sont sur une courbe d'un ordre inférieur à celui de la proposée.

Le théorème ne devant pas cesser d'avoir lieu lorsque le point d'où les tangentes sont issues se trouve infiniment distant de la courbe proposée, il en résulte le corollaire suivant :

Corollaire. Les points de contact d'une courbe plane, d'un ordre quelconque avec toutes ses tangentes parallèle à une droite fixe,

située d'une manière quelconque sur son plan, appartiennent toujours à une autre courbe d'un ordre inférieur au sien.

GÉOMÉTRIE PURE.

Usages de la projection stéréograhique en géométrie;

Par M. G. Dandelin, officier du génie, Professeur à Liège, membre de l'Académie royale des sciences de Bruxelles.

(*Extrait*; par M. Gergonne.)

Si, ayant tracé, sur une hémisphère, une figure quelconque, on fait de cette figure une perspective telle que le plan du tableau soit le plan du grand cercle qui termine l'hémisphère et que l'œil soit situé à celui des deux pôles de ce grand cercle qui se trouve situé dans l'hémisphère opposée; cette perspective sera ce que l'on appelle la *projection stéréographique* de la figure originale.

Il paraît que, dès le temps de Ptolémée, on connaissait déjà les deux principales propriétés de cette sorte de projection, lesquelles consistent 1.° en ce que les projections des cercles sont elles-mêmes des cercles; 2.° en ce que les projections de deux cercles qui se coupent se coupent précisément sous le même angle que ces cercles eux-mêmes.

On trouve dans le XI.e volume du présent recueil (pag. 153), une démonstration analitique de ces deux propositions; mais cette démonstration est un peu longue; et en conséquence nous croyons

faire une chose agréable à nos lecteurs en lui substituant ici l'élégante démonstration de M. Dandelin, qui n'exige absolument ni construction ni calcul.

I. Soient d'abord menées, par un même point de l'hémisphère destinée au tracé des figures originales, deux tangentes quelconques à la sphère ; et examinons par quelles droites ces deux tangentes seront représentées sur le tableau. Pour y parvenir, concevons des plans par l'œil et par les deux tangentes ; ces plans couperont la sphère suivant deux cercles qui auront pour corde commune la droite menée de l'œil au point d'intersection des deux tangentes ; laquelle droite percera le tableau au sommet de l'angle formé par leurs projections ; et les intersections des plans de ces deux cercles avec celui du tableau seront évidemment les perspectives de ces mêmes tangentes.

Par l'œil soient menées des tangentes à ces deux cercles ; lesquelles sont aussi tangentes à la sphère ; elles seront, comme telles, parallèles au plan du tableau, et par suite parallèles aux perspectives des deux premières ; elles feront donc entre elles un angle égal à celui de ces perspectives ; mais elles feront aussi évidemment entre elles un angle égal à celui des premières tangentes ; puisque les unes et les autres sont menées aux deux extrémités de la corde commune aux deux cercles ; donc aussi les perspectives des deux premières tangentes font entre elles un angle égal à celui de ces tangentes elles-mêmes. Ainsi, *les projections stéréographiques de deux tangentes en un même point de la sphère se coupent sous le même angle que ces deux tangentes ;* elles sont donc rectangulaires si ces tangentes le sont elles-mêmes.

De là il est facile de conclure 1.° que les projections stéréographiques de deux courbes quelconques tracées sur la sphère se coupent sous le même angle que ces courbes elles-mêmes, et sont conséquemment tangentes l'une à l'autre, si les courbes originales le sont elles-mêmes ; 2.° que, par suite, la projection stéréographi-

que d'une figure de petites dimensions tracée sur la sphère approche d'autant plus de lui être semblable que cette figure a moins d'étendue.

II. Concevons présentement que, sur l'hémisphère destinée au tracé des figures, on ait tracé un cercle quelconque; et examinons par quelle courbe il sera représenté sur le tableau. Pour y parvenir, concevons qu'on ait circonscrit à la sphère un cône qui la touche suivant le cercle dont il s'agit; soient C le sommet de ce cône, M un quelconque des points de la ligne de contact et T la tangente au cercle en ce point, laquelle sera aussi une tangente à la sphère. L'élément CM du cône est également une tangente à la sphère au point M, et ces deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre. Donc (I) leurs perspectives sur le tableau doivent aussi être perpendiculaires l'une à l'autre.

Soient respectivement C′, M′, T′ les perspectives des deux points C, M, et de la tangente T; la droite C′M′ devra donc être perpendiculaire à la droite T′, quel que soit d'ailleurs le points M sur la circonférence du cercle dont il s'agit. Mais la droite T′ est évidemment une tangente en M′ à la perspective de la circonférence de ce cercle; donc C′M′ est une normale à cette même perspective au point M′. La propriété caractéristique de la perspective de la circonférence du cercle dont il s'agit est donc de couper orthogonalement toutes les droites tracées par le point C′ sur le plan du tableau; propriété qui ne saurait appartenir qu'à un cercle qui a son centre en C′.

Ainsi, *la projection stéréographique de l'un quelconque des cercles de la sphère est un autre cercle dont le centre est la projection du sommet du cône qui touche la sphère suivant le cercle dont il s'agit.*

III. Après avoir ainsi démontré les propriétés les plus saillantes de la projection stéréographique, M. Dandelin applique ce mode

de projection à la démonstration d'un grand nombre de théorèmes de géométrie plane, à peu près comme on y avait employé jusqu'ici la perspective ordinaire. Sa méthode consiste, en général, à disposer la figure à laquelle se rapporte le théorème qu'il s'agit de démontrer, sur le plan du tableau, de telle sorte qu'elle devienne la projection stéréographique d'une figure sphérique dans laquelle le théorème analogue soit manifeste. Ne pouvant ici le suivre dans ses développemens, nous nous bornerons à citer, comme modèle, la manière dont il démontre les importantes propriétés des hexagones inscrits et circonscrits au cercle.

1.° Soit un hexagone quelconque circonscrit au cercle, et concevons une sphère dont ce cercle soit une section plane quelconque; soit circonscrit à cette sphère un cône qui la touche suivant ce cercle; par le sommet du cône et par le point où se coupent deux diagonales joignant des sommets opposés de l'hexagone, soit conduit une droite qui percera la sphère en deux points. Plaçons l'œil à celui de ces deux points qui est le plus distant du sommet du cône; le tableau étant d'ailleurs disposé comme l'exige la projection stéréographique. La projection de la figure sera évidemment (II) un hexagone circonscrit à un cercle qui aura son centre à l'intersection des diagonales joignant deux couples de sommets opposés; or, on démontre très-facilement qu'alors la diagonale joignant les deux sommets opposés restans passe aussi par le centre. Les diagonales joignant les sommets opposés de la projection passent donc toutes trois par le même point; il doit donc en être de même dans la figure dont celle-là est la projection.

Le théorème de M. Brianchon ainsi démontré, on en déduit aisément celui de Pascal, à l'aide de la théorie des pôles; mais M Dandelin a préféré le démontrer directement comme il suit:

Soit un hexagone quelconque inscrit à un cercle, et concevons une sphère dont ce cercle soit une section plane. Soient A, B, C les trois points de concours des directions des côtés opposés de

l'hexagone ; par la droite AB, menons du côté opposé à l'hexagone un plan tangent à la sphère, et plaçons l'œil au point de contact ; le plan du tableau sera alors parallèle au plan tangent.

Or, il est connu et d'ailleurs très-visible que, lorsque deux droites originales vont concourir en un des points d'un plan parallèle au tableau conduit par l'œil, leurs perspectives sont deux droites parallèles et réciproquement ; donc les perspectives des côtés de l'hexagone qui concourent en A, ainsi que les perspectives de ceux qui concourent en B seront des droites parallèles ; donc la perspective de la figure sera un hexagone inscrit à un cercle, dans lequel deux côtés seront respectivement parallèles à leurs opposés.

Or, il est très-aisé de démontrer que, dans un tel hexagone, les deux côtés opposés restans doivent aussi être parallèles ; donc la perspective de la figure sera un hexagone inscrit à un cercle, dans lequel les côtés seront tous parallèles à leurs opposés ; d'où il suit que les points A, B, C de la figure originale doivent être tous trois sur le plan tangent à la sphère conduit par l'œil ; et, comme ils sont d'ailleurs tous trois aussi dans le plan de l'hexagone, il s'ensuit qu'ils appartiennent tous trois à une même ligne droite (*).

M. Dandelin parvient encore, par la même voie, à la construction que nous avons donnée pour la détermination du cercle qui en touche trois autres sur un plan (**). Il est seulement à regretter qu'il s'y appuie sur une formule de la théorie des traversales ; attendu que la prééminence des méthodes du genre des sinus devrait tenir essentiellement à l'absence de tout calcul. Mais ce qu'il a fait jusqu'ici nous garantit suffisamment qu'il ne lui sera pas dif-

---

(*) On peut consulter sur le même sujet la page 381 du IV.e volume du présent recueil.

(**) Voy. tom. VII, pag. 289, et tom. XIII, pag. 193.

ficile de remplacer l'emploi de cette formule par quelques-unes de ces considérations purement géométriques qui lui sont si familières.

Quant à nous, quelque plaisir que nous ayons à faire connaître à nos lecteurs les élégantes recherches de M. Dandelin, nous désirons sincèrement que le recueil périodique dans lequel il en consigne les résultats soit assez répandu en France pour que nous puissions nous dispenser à l'avenir de les entretenir des choses intéressantes qui s'y trouvent contenues, et nous borner à en faire à nous-même notre profit.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de dynamique.

On suppose que des points fixes, au nombre de n, distribués uniformément sur la circonférence d'un cercle, exercent, sur tout ce qui les environne une attraction uniquement fonction de la distance, et par conséquent d'une même intensité pour tous ces points, lorsque la distance est la même. On suppose que ce cercle, tournant d'un mouvement uniforme, sur son centre immobile et dans son plan, entraîne avec lui les points attirans dont il s'agit; et on demande quel mouvement leur action engendrera sur un point mobile extérieur, situé dans le plan du mouvement?

Problèmes de géométrie.

I. Un fil parfaitement flexible et inextensible est appliqué sur la surface d'un cône droit, de manière à suivre exactement les cir-

convolutions d'une spirale conique qui s'y trouve tracée (*), et à se terminer au sommet du cône. On suppose que l'on développe ce fil, en le maintenant constamment tangent à la spirale ; on demande quelle courbe décrira son extrémité dans l'espace ?

II. Suivant quelle courbe un fil parfaitement flexible et inextensible doit-il être roulé sur la surface d'un cône droit, pour qu'en le développant, comme il vient d'être dit, son extrémité ne sorte pas du plan conduit par le sommet du cône, perpendiculairement à son axe ? et quelle courbe décrira alors cette extrémité sur ce plan ?

III. Quel est, sur le plan de la base supposée elliptique, d'un cône oblique quelconque, le lieu géométrique des points de contact de toutes les ellipsoïdes qui, touchant cette base, sont en même temps inscrites à la surface convexe du cône.

(*) Voy., pour la définition de la *spirale conique*, la page 157 du présent volume.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul differentiel, du calcul aux différences et de l'interpolation des suites, considérées comme dérivant d'une source commune;

Par M. Ampère, de l'Académie royale des sciences de Paris, de celles d'Edimbourg, de Cambridge, de Genève, etc., Professeur de physique au Collége de France.

1. Le calcul différentiel, le calcul aux différences et les diverses méthodes d'interpolation reposent également sur un petit nombre de formules générales, applicables à toutes les fonctions, et qu'on n'a démontrées jusqu'ici que par des considérations souvent compliquées, presque toujours déduites de principes éloignés, ou d'inductions de nature à laisser des doutes sur leur généralité. On remarque surtout, dans l'exposition de ces diverses branches d'analise, une variété de procédé et de raisonnemens qui ne laisse que difficilement apercevoir leur liaison réciproque, et l'identité des principes dont elles ne sont pourtant, en quelque sorte, que des traductions variées.

Frappés de ces considérations, nous avons pensé faire une chose qui pourrait intéresser les géomètres, en déduisant toutes ces diverses formules de quelques théorèmes nouveaux ou peu connus,

que nous démontrerons d'abord, et dont il nous suffira ensuite de traduire les énoncés dans l'algorithme reçu, relatif aux divers cas particuliers, pour en voir éclore, d'une manière tout-à-fait naturelle, les formules connues qui répondent à chacun d'eux.

2. Soit fx une fonction de x de forme quelconque, de manière que fa, fb, fc, ... soient respectivement ce que devient cette fonction, lorsqu'on y fait, tour-à-tour, $x=a$, $x=b$, $x=c$, ... Soient posés successivement

$$\frac{\mathrm{f}b-\mathrm{f}a}{b-a}=\mathrm{f}_1(a,b)\,,\quad \frac{\mathrm{f}c-\mathrm{f}a}{c-a}=\mathrm{f}_1(a,c)\,,\quad \frac{\mathrm{f}d-\mathrm{f}a}{d-a}=\mathrm{f}_1(a,d)\,,\;\ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{f}_1(a,c)-\mathrm{f}_1(a,b)}{c-b}=\mathrm{f}_2(a,b,c)\,,\quad \frac{\mathrm{f}_1(a,d)-\mathrm{f}_1(a,b)}{d-b}=\mathrm{f}_2(a,b,d)\,,\;\ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{f}_2(a,b,d)-\mathrm{f}_2(a,b,c)}{d-c}=\mathrm{f}_3(a,b,c,d)\,,\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les fonctions f_1, f_2, f_3, ... sont ce que nous appellerons à l'avenir les *fonctions interpolaires* des différens ordres des quantités a, b, c, d, ...

3. La première remarque que nous ferons au sujet de ces sortes de fonctions, c'est qu'elles sont toujours symétriques, de telle sorte qu'on y peut intervertir, comme on voudra, l'ordre des élémens a, b, c, d, ... qui concourent à leur formation, sans qu'elles en éprouvent aucun changement. En effet, on a, en premier lieu,

$$\mathrm{f}_1(a,b)=\frac{\mathrm{f}b-\mathrm{f}a}{b-a}=\frac{\mathrm{f}a}{a-b}+\frac{\mathrm{f}b}{b-a}\,,$$

fonction évidemment symétrique en a et b, et on pourrait en dire autant de toutes les fonctions interpolaires à deux lettres ou du premier ordre.

On aura donc, semblablement,

$$f_1(a,c)=\frac{fa}{a-c}+\frac{fc}{c-a};$$

mais,

$$f_2(a,b,c)=\frac{f_1(a,c)-f_1(a,b)}{c-b}=\frac{f_1(a,b)}{b-c}+\frac{f_1(a,c)}{c-b};$$

mettant donc pour $f_1(a,b)$ et $f_1(a,c)$ les valeurs ci-dessus, il viendra

$$f_2(a,b,c)=\frac{fa}{(a-b)(b-c)}+\frac{fb}{(b-a)(b-c)}+\frac{fa}{(a-c)(c-b)}+\frac{fc}{(c-a)(c-b)};$$

ou, en réduisant à une seule les deux fractions de même numérateur,

$$f_2(a,b,c)=\frac{fa}{(a-b)(a-c)}+\frac{fb}{(b-a)(b-c)}+\frac{fc}{(c-a)(c-b)};$$

fonction également symétrique, et on démontrerait la même chose de toutes les fonctions interpolaires à trois lettres, ou du second ordre.

On pourrait, par des transformations analogues, étendre progressivement le même principe aux fonctions interpolaires des ordres supérieurs; mais, afin de ne pas nous borner à une simple induction, à l'égard d'un principe qui est fondamental, dans la théorie qui nous occupe, prouvons que, si la symétrique se soutient jusqu'aux fonctions du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, inclusivement, elle aura lieu également pour celles du $n.^{\text{ième}}$

Supposons donc que, pour les n lettres $a, b, c, \ldots p, q, r$, on ait trouvé

$$\mathrm{f}_{n-1}(a, b, c, \ldots p, q, r) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)\ldots\ldots(a-q)(a-r)} \\ + \dfrac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)\ldots\ldots(b-q)(b-r)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{\mathrm{f}q}{(q-a)(q-b)\ldots\ldots(q-p)(q-r)} \\ + \dfrac{\mathrm{f}r}{(r-a)(r-b)\ldots\ldots(r-p)(r-q)} \end{array} \right\};$$

nous aurons semblablement, pour les n lettres $a, b, c, \ldots p, q, s, \ldots$

$$\mathrm{f}_{n-1}(, b, c, \ldots p, q, s) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)\ldots\ldots(a-q)(a-s)} \\ + \dfrac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)\ldots\ldots(b-q)(b-s)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{\mathrm{f}q}{(q-a)(q-b)\ldots\ldots(q-p)(q-s)} \\ + \dfrac{\mathrm{f}s}{(s-a)(s-b)\ldots\ldots(s-p)(s-q)} \end{array} \right\};$$

fonctions qui sont symétriques l'une et l'autre. Mais, en vertu de la définition des fonctions interpolaires, on a, pour les $n+1$ lettres $a, b, c, \ldots\ldots q, r, s$,

$$\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots p,r,s)=\frac{\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q,s)-\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q,r)}{s-r},$$

$$=\frac{\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q,r)}{r-s}+\frac{\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q,s)}{s-r};$$

il viendra donc, en substituant,

$$\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots q,r,s)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)\ldots(a-q)(a-r)}+\dfrac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)\ldots(a-q)(a-s)}\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)\ldots(b-q)(b-r)}+\dfrac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)\ldots(b-q)(b-s)}\\[2ex]
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}q}{(q-a)(q-b)\ldots(q-p)(q-r)}+\dfrac{\mathrm{f}q}{(q-a)(q-b)\ldots(q-p)(q-s)}\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}r}{(r-a)(r-b)\ldots(r-p)(r-q)}+\dfrac{\mathrm{f}s}{(s-a)(s-b)\ldots(s-p)(s-q)}
\end{array}\right\};$$

où, en réduisant à une seule les fractions de même numérateur,

$$\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots p,q,s)=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)\ldots(a-r)(a-s)}\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)\ldots(b-r)(b-s)}\\[2ex]
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}r}{(r-a)(r-b)\ldots(r-q)(r-s)}\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}r}{(s-a)(s-b)\ldots(s-q)(s-r)}
\end{array}\right\};$$

fonction également symétrique. Il demeure donc établi par là que, si la symétrie se soutient jusqu'à l'emploi de la $n.^{\text{ième}}$ lettre, inclusivement, elle aura lieu encore après l'introduction de la $(n+1)^{\text{ième}}$, quel que soit n ; puis donc que cette symétrique a lieu en effet pour des fonctions interpolaires formées de deux et de trois lettres, il s'ensuit qu'elle doit être regardée comme un fait analitique généralement démontré.

4. D'après le mode de génération des fonctions interpolaires, il existe une relation fort simple entre deux d'entre elles de même ordre, ne différant l'une de l'autre que par un seul des élémens qui les composent. Puisqu'en effet on a

$$\mathrm{f}_{n+1}(a,b,c,d,\ldots)=\frac{\mathrm{f}_n(b,c,d,\ldots)-\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)}{b-a},$$

on en conclura

$$\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)-\mathrm{f}_n(b,c,d,\ldots)=(a-b)\mathrm{f}_{n+1}(a,b,c,d,\ldots). \qquad (1)$$

On peut également obtenir une relation très-remarquable entre trois de ces fonctions interpolaires de même ordre, ne différant que par l'exclusion donnée tour-à-tour à une lettre, sur trois d'entre elles. On a en effet, par la formule (1)

$$\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)-\mathrm{f}_n(b,c,d,\ldots)=(a-b)\mathrm{f}_{n+1}(a,b,c,d,\ldots),$$

$$\mathrm{f}_n(a,b,d,\ldots)-\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)=(b-c)\mathrm{f}_{n+1}(a,b,c,d,\ldots);$$

d'où, en retranchant du produit de la première par $b-c$ le produit de la seconde par $a-b$ et réduisant,

$$(a-b)\mathrm{f}_n(a,b,d,\ldots)+(b-c)\mathrm{f}_n(b,c,d,\ldots)+(c-a)\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)=0; \quad (2)$$

formule que l'on retiendra facilement dans sa mémoire, en remarquant 1.° que la somme des trois coefficiens binomes est nulle; 2.° que la lettre qui manque dans chacun de ces coefficiens est aussi celle qui manque dans la fonction qu'il multiplie. Remarquons, au surplus, que, bien que nous ayons supposé qu'il s'agissait des trois premières lettres, le théorème n'en demeure pas moins établi généralement pour trois lettres quelconques; puisqu'à cause de la symétrie des fonctions interpolaires, on peut toujours amener ces trois lettres à être les trois premières.

5. Les fonctions interpolaires des différens ordres sont, comme l'on voit, complètement déterminées, tant que les élémens $a,b,c,d,\ldots$ dont elles se composent sont tous différens les uns des autres; mais, si tous ou partie d'entre eux sont égaux, il arrive que toutes ou partie des fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots$, qu'il faut successivement calculer, pour parvenir à la valeur de $f_n(a,b,c,d,\ldots)$ se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Or, on sait que, lorsqu'une fonction quelconque, qui n'est susceptible que d'une valeur unique, se présente sous cette forme, en vertu de l'égalité de deux des élémens p et q dont elle se compose, trois cas seulement peuvent se présenter. 1.° Il peut arriver que la différence $p-q$ décroissant indéfiniment, la fonction décroisse aussi indéfiniment, de manière à pouvoir devenir moindre que toute grandeur donnée; ce qu'on exprime en disant qu'elle devient *nulle* quand $p=q$; 2.° il peut arriver, au contraire, que la différence $p-q$ décroissant indéfiniment, la fonction croisse indéfiniment, de manière à pouvoir surpasser toute grandeur donnée; ce qu'on exprime en disant qu'elle devient *infinie*, quand $p=q$; 3.° enfin il peut se faire que $p-q$ décroissant indéfiniment, la fonction ne décroisse ni ne croisse indéfiniment, mais seulement de manière à tendre sans cesse vers une grandeur constante, vers une limite finie, dont elle pourra différer de moins de toute grandeur donnée, en prenant $p-q$

d'une petitesse suffisante ; et alors cette *limite* fixe sera dite la valeur de la fonction qui répond $p=q$.

Or, nous allons voir qu'à l'égard des fonctions interpolaires, ce troisième cas est, généralement parlant, le seul qui puisse avoir lieu, ou, en d'autres termes, qu'en général ces sortes de fonctions ne sauraient jamais devenir nulles, par l'effet de l'égalité de tous ou partie des élémens dont elles se composent.

Pour le prouver, imaginons qu'on partage l'intervalle $b-a$ en un nombre arbitraire m de parties égales ; posons, pour abréger, $b-a=k$, et soient

$$a_1=a+\frac{k}{m}\,,\quad a_2=a_1+\frac{k}{m}\,,\quad a_3=a_2+\frac{k}{m}\,,\ \ldots\ldots\ b=a_{m-1}+\frac{k}{m}\,;$$

nous aurons (1)

$$\mathrm{f}_{n-1}(a_1,c,d,\ldots.)-\mathrm{f}_{n-1}(a,c,d,\ldots..)=\frac{k}{m}\,\mathrm{f}_n(a_1,a,c,d,\ldots.)\,,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(a_2,c,d,\ldots.)-\mathrm{f}_{n-1}(a_1,c,d,\ldots.)=\frac{k}{m}\,\mathrm{f}_n(a_1,a_2,c,d,\ldots)\,,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(a_3,c,d,\ldots.)-\mathrm{f}_{n-1}(a_2,c,d,\ldots.)=\frac{k}{m}\,\mathrm{f}_n(a_2,a_3,c,d,\ldots.)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(b,c,d,\ldots)-\mathrm{f}_{n-1}(a_{m-1},c,d,\ldots.)=\frac{k}{m}\,\mathrm{f}_n(a_{m-1},b,c,d,\ldots)\,;$$

en ajoutant, réduisant et se rappelant que (1)

$$\mathrm{f}_{n-1}(b,c,d,\ldots.)-\mathrm{f}_{n-1}(a,c,d,\ldots..)=k\mathrm{f}_n(a,b,c,d,\ldots..)\,,$$

il viendra, en divisant par k,

$$f_n(a,b,c,d,\ldots)=\frac{1}{m}\left\{\begin{array}{l} f_n(a,a_1,c,d,\ldots\ldots)\\ +f_n(a_1,a_2,c,d,\ldots\ldots)\\ +f_n(a_2,a_3,c,d,\ldots)\\ +\ldots\ldots\ldots\\ +f_n(a_{m-1},b,c,d,\ldots) \end{array}\right\}; \quad (3)$$

c'est-à-dire que $f_n(a,b,c,d,\ldots)$ est la moyenne arithmétique entre toutes les autres fonctions interpolaires du même ordre déduites de celle-là, en y mettant successivement a et a_1, a_1 et a_2, a_2 et a_3, ..., a_{m-1} et b, en place de a et b.

Il suit de là qu'excepté le cas où toutes les fonctions dont la somme divisée par m compose le second membre de l'équation (3) seraient égales entre elles, auquel cas chacune d'elles serait égale à celle qui forme le premier membre, il y en aura toujours de plus grandes et de plus petites que celle-là. Or, on peut toujours prendre le nombre m assez grand pour rendre $\frac{k}{m}$ et conséquemment les différences consécutives a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, ... $b-a_{m-1}$ d'une petitesse indéfinie ; donc, si une fonction interpolaire telle que $f_n(a,b,c,d,\ldots)$ pouvait devenir nulle ou infinie, lorsqu'on y fait $a=b$, on pourrait toujours prendre pour m un assez grand nombre pour rendre toutes les fonctions qui composent le second membre de l'équation (3) moindres ou plus grandes qu'une grandeur donnée quelconque, et, en particulier, moindres ou plus grandes que celle qui forme son premier membre, ce qui rendrait cette équation absurde.

On voit donc que la fonction $f_n(a,b,c,d,\ldots)$ continue à avoir une valeur déterminée, qui n'est ni nulle ni infinie, lorsqu'on suppose les deux premiers élémens a et b égaux entre eux ; et il en sera de même encore, dans le cas de l'égalité entre deux autres quelconques de ses élémens ; puisqu'en vertu de la symétrie de la

fonction, on pourra toujours amener ces deux élémens à être les premiers. Il en serait encore évidemment de même dans le cas de l'égalité de plus de deux élémens entre eux, ou de l'égalité entre plusieurs groupes d'élémens; et, bien qu'alors le procédé que nous avons indiqué pour parvenir à ces sortes de fonctions n'en assigne plus la valeur, on pourra néanmoins les représenter et les employer dans les calculs, comme si cette valeur était connue. Observons d'ailleurs que rien n'empêche que les fonctions interpolaires, comme toutes les autres fonctions, ne deviennent nulles ou infinies, pour certaines valeurs particulières des élémens qui les composent; mais cela n'arrivera jamais, tant que ces élémens conserveront leur indétermination.

6. De la formule (1) on peut conclure

$$\mathrm{f}x=\mathrm{f}a+(x-a)\mathrm{f}_1(a,x)\ ,$$

$$\mathrm{f}_1(a,x)=\mathrm{f}_1(a,b)+(x-b)\mathrm{f}_2(a,b,x)\ ,$$

$$\mathrm{f}_2(a,b,x)=\mathrm{f}_2(a,b,c)+(x-c)\mathrm{f}_3(a,b,c,x)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,x)=\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q)+(x-q)\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots p,q,x)\ ;$$

ce qui donne, par des substitutions successives,

$$\mathrm{f}x=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{f}a\\ +(x-a)\mathrm{f}_1(a,b)\\ +(x-a)(x-b)\mathrm{f}_2(a,b,c)\\ +(x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{f}_3(a,b,c,d)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q)\\ +(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q)\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots p,q,x)\ .\end{array}\right.$$

Cette valeur de fx contient une fonction interpolaire de x, à son dernier terme; mais, si les élémens $a,b,c,\ldots p,q$, ont des valeurs comprises entre des limites peu étendues, et que x soit lui-même compris entre eux, la série sera assez convergente pour qu'on puisse se permettre d'en négliger le dernier terme, et on aura alors sensiblement

$$fx=\left\{\begin{array}{l} fa \\ +(x-a)f_1(a,b) \\ +(x-a)(x-b)f_2(a,b,c) \\ +(x-a)(x-b)(x-c)f_3(a,b,c,d) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)f_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q) \end{array}\right\}. \quad (4)$$

On reconnaît ici la formule ordinaire d'interpolation; ce qui justifie la dénomination d'*interpolaires* que nous avons donnée aux fonctions dont elle se compose.

7. Posons $y=fx$, et désignons

par Δy la quantité dont y augmente, lorsque x devient $x+\Delta x$;

par $\Delta^2 y$ la quantité dont Δy augmente, lorsque x devient $x+\Delta x$;

par $\Delta^3 y$ la quantité dont $\Delta^2 y$ augmente, lorsque x devient $x+\Delta x$,

. . . .

par $\Delta^n y$ la quantité dont $\Delta^{n-1} y$ augmente, lorsque x devient $x+\Delta x$;

nous aurons, par la définition des fonctions interpolaires,

$y = \mathrm{f}x$,

$\Delta y = \mathrm{f}(x+\Delta x) - \mathrm{f}x = \Delta x . \mathrm{f}_1(x, x+\Delta x)$,

$\Delta^2 y = \Delta x \{ \mathrm{f}_1(x+\Delta x, x+2\Delta x) - \mathrm{f}_1(x, x+\Delta x) \} = 2\Delta x^2 . \mathrm{f}_2(x, x+\Delta x, x+2\Delta x)$.

L'analogie conduit à soupçonner qu'en général

$$\Delta^n y = n! \Delta x^n \mathrm{f}_n(x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots. x+n\Delta x) .$$

Pour changer ce soupçon en certitude, il suffit de prouver qu'il devra en être ainsi, si l'on a

$$\Delta^{n-1} y = (n-1)! \Delta x^{n-1} \mathrm{f}_{n-1}(x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots x+(n-1)\Delta x) ;$$

or, en adoptant cette hypothèse, on aura

$$\Delta^n y = (n-1)! \Delta x^{n-1} \{ \mathrm{f}_{n-1}(x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots x+n\Delta x) - \mathrm{f}_{n-1}(x, x+\Delta x, \ldots x+(n-1)\Delta x) \} ;$$

c'est-à-dire,

$$\Delta^n y = n! \Delta x^n \mathrm{f}_n(x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots.. x+n\Delta x) ; \quad (5)$$

comme nous l'avions annoncé.

8. Reprenons la formule (4)

$$\mathrm{f}x = \mathrm{f}a + (x-a)\mathrm{f}_1(a,b) + (x-a)(x-b)\mathrm{f}_2(a,b,c) + (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{f}_3(a,b,c,d) + \ldots$$

supposons les élémens $a, b, c, \ldots.$ équidifférens, et soient posés

$$b-a = c-b = d-c = \ldots. = k ;$$

soient faits, de plus

$$y_p = \mathrm{f}a , \quad y_{p+1} = \mathrm{f}b , \quad y_{p+2} = \mathrm{f}c , \ldots.. ; \quad y_{p+n} = \mathrm{f}x ;$$

nous aurons

$$\frac{\Delta y_p}{k}=\frac{\mathrm{f}b-\mathrm{f}a}{b-a}=\mathrm{f}_1(a,b)\,,\quad \frac{\Delta^2 y_p}{k^2}=2\,\frac{\mathrm{f}_1(b,c)-\mathrm{f}_1(a,b)}{c-a}=2\mathrm{f}_2(a,b,c)\,,\quad \frac{\Delta^3 y_p}{k^3}=\ldots$$

$$\frac{\Delta y_{p+1}}{k}=\frac{\mathrm{f}c-\mathrm{f}b}{c-b}=\mathrm{f}_1(b,c)\,,\quad \frac{\Delta^2 y_{p+1}}{k^2}=2\,\frac{\mathrm{f}_1(c,d)-\mathrm{f}_1(b,c)}{d-b}=2\mathrm{f}_2(b,c,d)\,,\ \ldots\ldots$$

$$\frac{\Delta y_{p+3}}{k}=\frac{\mathrm{f}d-\mathrm{f}c}{d-c}=\mathrm{f}_1(c,d)\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

. . . . ;

d'où, en substituant dans la formule (4),

$$y_{p+n}=y_p+\frac{x-a}{1}\cdot\frac{\Delta y_p}{k}+\frac{x-a}{1}\cdot\frac{x-b}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_p}{k^2}+\frac{x-a}{1}\cdot\frac{x-b}{2}\cdot\frac{x-c}{3}\cdot\frac{\Delta^3 y_p}{k^3}+\ldots\ldots \quad (6)$$

Si nous posons $x-a=nk$, nous aurons

$$x-b=(x-a)-(b-a)=nk-k=(n-1)k\,,$$

$$x-c=(x-a)-(c-a)=nk-2k=(n-2)k\,,$$

. . . . ,

de sorte qu'alors cette formule deviendra

$$y_{p+n}=y_p+\frac{n}{1}\Delta y_p+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 y_p+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\Delta^3 y_p+\ldots\ldots \quad (7)$$

et, par suite, en supposant p nul,

$$y_n=y+\frac{n}{1}\Delta y+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 y+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}+\ldots\ldots \quad (8)$$

ce sont les formules connues d'interpolation, pour le cas de l'équidifférence des valeurs de la variable indépendante.

9. D'après ce qui a été démontré ci-dessus (5), on a

$$f_n(a,b,c,\ldots\, r,s)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{fa}{(a-b)(a-c)\ldots.(a-r)(a-s)} \\ +\dfrac{fb}{(b-a)(b-c)\ldots.(b-r)(b-s)} \\ +\dfrac{fc}{(c-a)(c-b)\ldots.(c-r)(c-s)} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{fs}{(s-a)(s-b)\ldots.(s-q)(s-r)} \end{array}\right\};$$

supposant alors, comme ci-dessus,

$$b-a=c-b=d-c=\ldots.=s-r=k\,,$$

et posant en outre

$$y_p=fa\,,\quad y_{p+1}=fb\,,\quad y_{p+2}=fc\,,\ \ldots\ y_{p+n-1}=fr\,,\quad y_{p+n}=fs\,,$$

on trouvera, en substituant et renversant l'ordre des termes du second membre,

$$f_n(a,a+k,a+2k,a+3k,\ldots\ldots a+nk)$$

$$=\frac{y_{p+n}}{n!k^n}-\frac{y_{p+n-1}}{(n-1)!1!k^n}+\frac{y_{p+n-2}}{(n-2)!2!k^n}-\frac{y_{p+n-3}}{(n-3)!3!k^n}+\ldots\pm\frac{y_{p+1}}{1!(n-1)!k^n}\mp\frac{y_p}{n!k^n};$$

mais si, dans la formule (5), on change y en y_p, x en a et qu'on y fasse, en outre, $\Delta a=k$, elle donnera

$$f_n(a,a+k,a+2k,a+3k,\ldots\ldots a+nk)=\frac{\Delta^n y_p}{n!k^n};$$

donc, en égalant ces deux valeurs et multipliant par $n!$,

$$\Delta^n y_p = y_{p+n} - \frac{n}{1} y_{p+n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} y_{p+n-2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} y_{p+n-3} + \ldots ; \quad (9)$$

d'où, en supposant p nul

$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} y_{n-2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} y_{n-3} + \ldots ; \quad (10)$$

formules inverses des formules (7) et (8).

10. Revenons au cas où plusieurs des élémens de la fonction f_n sont égaux entre eux. Nous avons observé (5) que, bien qu'alors cette fonction se présentât sous la forme $\frac{0}{0}$, elle n'en avait pas moins une valeur déterminée qui, en général, n'était ni nulle ni infinie, et que, bien qu'alors notre procédé ne fût plus propre à en assigner la valeur, les mêmes notations n'en étaient pas moins propres à la représenter ; en continuant donc à les employer, nous aurons d'abord (1)

$$f_1(b,b) - f_1(a,b) = (b-a) f_2(a,b,b) ,$$

$$f_1(a,b) - f_1(a,a) = (b-a) f_2(a,a,b) ,$$

d'où, en ajoutant et réduisant,

$$f_1(b,b) - f_1(a,a) = (b-a) \{ f_2(a,b,b) + f_2(a,a,b) \} .$$

Nous aurons aussi

$$f_2(b,b,b) - f_2(a,b,b) = (b-a) f_3(a,b,b,b) ,$$

$$f_2(a,b,b) - f_2(a,a,b) = (b-a) f_3(a,a,b,b) ,$$

$$f_2(a,a,b) - f_2(a,a,a) = (b-a) f_3(a,a,a,b) ,$$

d'où en ajoutant encore et réduisant

$$\mathrm{f}_2(b,b,b)-\mathrm{f}_2(a,a,a)=(b-a)\{\mathrm{f}_3(a,b,b,b)+\mathrm{f}_3(a,a,b,b)+\mathrm{f}_3(a,a,a,b)\}.$$

En continuant de la même manière, on aura en général

$$\mathrm{f}_{n-1}(b,b,b,\ldots b)-\mathrm{f}_{n-1}(a,a,a,\ldots a)=(b-a)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{f}_n(a,b,b,\ldots\ldots b,b,b)\\+\mathrm{f}_n(a,a,b,\ldots\ldots b,b,b)\\+\mathrm{f}_n(a,a,a,\ldots\ldots b,b,b)\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\\+\mathrm{f}_n(a,a,a,\ldots\ldots a,a,b)\\+\mathrm{f}_n(a,a,a,\ldots\ldots a,a,b)\end{array}\right\};$$

si, dans cette formule, on fait $b=a+k$, d'où $b-a=k$, et qu'on change ensuite a en x, elle deviendra

$$\mathrm{f}_{n-1}(x+k,x+k,x+k,\ldots x+k,x+k)-\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots x,x)$$

$$=k\left\{\begin{array}{l}\mathrm{f}_n(x,x+k,x+k,\ldots\ldots x+k,x+k,x+k)\\+\mathrm{f}_n(x,x,x+k,\ldots\ldots x+k,x+k,x+k)\\+\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots x+k,x+k,x+k)\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots x,x+k,x+k)\\+\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots x,x+k)\end{array}\right\}; \quad (11)$$

formule qui va nous servir tout-à-l'heure.

11. En conservant toujours les mêmes notations, on a, par la formule fondamentale,

$$\mathrm{f}(x+k)=\mathrm{f}x+k\mathrm{f}_1(x,x+k)\,,$$

$$\mathrm{f}_1(x,x+k)=\mathrm{f}_1(x,x)+k\mathrm{f}_2(x,x,x+k)\,,$$

$$\mathrm{f}_2(x,x,x+k)=\mathrm{f}_2(x,x,x)+k\mathrm{f}_3(x,x,x,x+k)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(x,x,x,\ldots x,x+k)=\mathrm{f}_{n-1}(x,x,x,\ldots x,x)+k\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots x,x,x+k)\,;$$

prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $1,k$, $k^2,k^3,\ldots k^{n-1}$, et réduisant, on trouvera

$$\mathrm{f}(x+k)=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{f}x\\ +k\mathrm{f}_1(x,x)\\ +k^2\mathrm{f}_2(x,x,x)\\ +k^3\mathrm{f}_3(x,x,x,x)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +k^{n-1}\mathrm{f}_{n-1}(x,x,x,\ldots x,x)\\ +k^n\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots x,x,x+k)\end{array}\right\}; \quad (12)$$

développement de $\mathrm{f}(x+k)$ en série où on pourra toujours prendre k assez petit, sans être nul, pour que la série soit convergente, puisque les fonctions qui multiplient les diverses puissances de k ont toujours des valeurs finies. En outre, si l'on parvient à assigner deux limites entre lesquelles se trouve compris le dernier terme du développement, le seul qui renferme k sous le signe de fonction, on connaîtra aussi par là les limites de l'erreur commise en bornant la série aux seuls termes qui précèdent celui-là.

Examinons présentement, d'une manière plus particulière, la

nature des multiplicateurs des diverses puissances de k, dans la formule (12). Soit, en général, désigné par $f^{(p)}x$, la limite vers laquelle tend sans cesse le rapport

$$\frac{f^{(p-1)}(x+k)-f^{(p-1)}x}{k},$$

lorsque k tend vers zéro ; où, en d'autres termes, ce que devient ce rapport, lorsque k devient infiniment petit ou nul. Alors $f'x$, $f''x$, $f'''x$, ..., seront ce qu'on appelle les *dérivées* successives de la fonction fx. On aura d'abord

$$f_1(x,x)=f'x\ ;$$

car on a

$$f_1(x,x+k)=\frac{f(x+k)-fx}{k}\ ;$$

et les deux quantités $f_1(x,x)$ et $f'x$ sont respectivement ce que deviennent les deux membres de cette équation, lorsqu'on suppose $k=0$.

On aura en conséquence,

$$\frac{f'(x+k)-f'x}{k}=\frac{f_1(x+k,x+k)-f_1(x,x)}{k}\ ;$$

mais, en vertu de la formule (11)

$$f_1(x+k,x+k)-f_1(x,x)=k\{f_2(x,x+k,x+k)+f_2(x,x,x+k)\}$$

donc

$$\frac{f'(x+k)-f'x}{k}=f_2(x,x+k,x+k)+f_2(x,x,x+k)\ ;$$

donc aussi $f''x=2f_2(x,x,x)$; car ce sont là les limites respectives

vers lesquelles tendent les deux membres de cette équation, à mesure que k tend vers zéro.

On aura, en conséquence,

$$\frac{f''(x+k)-f''x}{k}=2.\frac{f_2(x+k,x+k,x+k)-f_2(x,x,x)}{k};$$

mais, en vertu de la formule (11)

$$f_2(x+k,x+k,x+k)-f_2(x,x,x)=k\left\{\begin{array}{l}\quad f_3(x,x+k,x+k,x+k)\\+f_3(x,x,x+k,x+k)\\+f_3(x,x,x,x+k)\end{array}\right\};$$

donc

$$\frac{f''(x+k)-f''x}{k}=2\{f_3(x,x+k,x+k,x+k)+f_3(x,x,x+k,x+k)+f_3(x,x,x,x+k)\};$$

donc aussi $f'''x=1.2.3.f_3(x,x,x,x)$; car ce sont là les limites respectives vers lesquelles tendent les deux membres de cette équation à mesure que k tend vers zéro.

Comme rien n'empêche de poursuivre ce raisonnement aussi loin qu'on voudra, il s'ensuit qu'on a

$$f_1(x,x)=\frac{f'x}{1},\quad f_2(x,x,x)=\frac{f''x}{1.2},\quad f_3(x,x,x,x)=\frac{f'''x}{1.2\,3},\ \ldots\ldots$$

et, en général,

$$f_n(x,x,x,\ldots.x,x)=\frac{f^{(n)}x}{n!};$$

valeurs qui, substituées dans la formule (12), donneront

$$f(x+k)=fx+\frac{k}{1}f'x+\frac{k^2}{1.2}f''x+\frac{k^3}{1.2.3}f'''x+\dots+\frac{k^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}x$$

$$+k^n f_n(x,x,x,\dots\dots x,x,x+k)\;. \qquad (13)$$

On reconnaît ici la série de Taylor, qui se trouve ainsi démontrée.

12. On a cette suite d'équations (1)

$$f_1(x,x)=f_1(x,x+k)-kf_2(x,x,x+k)\;,$$

$$f_2(x,x,x+k)=f_2(x,x+k,x+2k)-2kf_3(x,x,x+k,x+2k)\;,$$

$$f_3(x,x,x+k,x+2k)=f_3(x,x+k,x+2k,x+3k)-3kf_4(x,x,x+k,x+2k,x+3k)\;,$$

. . . .

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $+1$, $-k$, $+2k^2$, $-3k^3$, $+\dots$, et réduisant, il viendra

$$f_1(x,x)=f_1(x,x+k)-kf_2(x,x+k,x+2k)+1.2k^2f_3(x,x+k,x+2k,x+3k)-\dots$$

$$\pm(n-1)k^{n-1}f_n(x,x+k,x+2k,\dots x+nk)\pm n!k^n f_{n+1}(x,x,x+k,x+2k,\dots x+nk)\;;$$

mais on a par la formule (5), en posant $y=fx$, d'où $f_1(x,x)=f'x=\frac{dy}{dx}$,

$$f_1(x,x+k)=\frac{\Delta y}{k}\;,$$

$$f_2(x,x+k,x+2k)=\frac{\Delta^2 y}{1.2k^2}\;,$$

$$f_3(x,x+k,x+2k,x+3k)=\frac{\Delta^3 y}{1.2.3\,k^3}\;,$$

. . . . ;

il viendra donc, en substituant et multipliant par k

$$k\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{1}-\frac{\Delta^2 y}{2}+\frac{\Delta^3 y}{3}-\ldots\pm\frac{\Delta^n y}{n}\mp n!k^{n+1}f_{n+1}(x,x,x+k,x+2k,\ldots x+nk).$$

On pourrait étendre indéfiniment ces recherches ; mais ce qui précède suffit pour atteindre le but que nous nous étions proposé (*).

GÉOMÉTRIE.

Rapport à l'Académie royale des sciences,

Par M. Cauchy ;

Sur un mémoire relatif aux propriétés des centres de moyennes harmoniques ;

Par M. Poncelet, Capitaine du génie.



Le secrétaire perpétuel de l'Académie, pour les sciences mathématiques, certifie que ce qui suit est extrait du procès-verbal de la séance du lundi 23 janvier 1826.

L'Académie nous a chargé, MM. Legendre, Ampère et moi, de lui rendre compte d'un mémoire de M. Poncelet, sur les centres

---

(*) Ce mémoire n'ayant point été rédigé par l'auteur, mais seulement d'après des notes très-sommaires qu'il avait fournies, le lecteur voudra bien ne point lui attribuer les négligences de rédaction ou même les erreurs qui pourraient s'y être glissées.

J. D. G.

de moyennes harmoniques. Pour donner une idée succincte de l'objet de ce mémoire, il est d'abord nécessaire de rappeler en quoi consiste la division harmonique d'une droite AB, par rapport à un point pris sur cette droite ou sur son prolongement. Si l'on désigne par la lettre C le point milieu de la droite dont il s'agit, la distance d'un point quelconque P de la même droite au point C sera évidemment la moyenne arithmétique entre les distances PA et PB; en sorte qu'on aura

$$PC=\frac{1}{2}(PA+PB) .$$

Or, si dans l'équation précédente on remplace les distances PA, PB, PC par les rapports $\frac{1}{PA}$, $\frac{1}{PB}$, $\frac{1}{PC}$, la formule qu'on obtiendra, savoir :

$$\frac{1}{PC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}\right),$$

ne pourra être vérifiée qu'autant que le point C coïncidera, non plus avec le milieu de la droite AB, mais avec un autre point situé sur cette droite, et qui se déplacera en même temps que le point P. Le point C, déterminé comme on vient de le dire, est *le centre des moyennes harmoniques* des points A et B, relativement au point P, pris pour origine (*). Si plusieurs points consécutifs A,B,C,D,E,....., sont tels que l'un quelconque d'entre eux coïncide avec le centre des moyennes harmoniques des deux points les plus voisins, ces différens points formeront une échelle har-

---

(*) Il est aisé de voir que les points P et C coupent harmoniquement la droite AB, dans le sens qui a été expliqué à la page 274 du présent volume.

J. D. G.

monique ; et il est facile de prouver que, pour obtenir une semblable échelle, il suffit de mettre en perspective une échelle de parties égales. Plusieurs des conséquences qui résultent de la division harmonique d'une droite avaient déjà été développées par divers géomètres, entre lesquels on doit distinguer Maclaurin. M. Poncelet ajoute de nouvelles propositions à celles qui étaient connues. Les plus remarquables sont celles auxquelles il est conduit en généralisant la définition du centre des moyennes harmoniques. On peut en simplifier la démonstration et les rendre plus faciles à saisir, en substituant aux définitions qu'il présente, celles que nous allons indiquer.

Si l'on suppose que chaque élément d'une droite matérielle homogène, et prolongée de part et d'autre à l'infini, attire un point situé hors de cette droite, suivant une certaine fonction de la distance, ce point sera sollicité au mouvement par une force perpendiculaire à la droite, et proportionnelle à une autre fonction de sa distance à cette droite. Si l'attraction entre deux points est réciproquement proportionnelle au quarré de leur distance, la force dont il s'agit sera réciproquement proportionnelle à la simple distance du point donné à la droite vers laquelle il est attiré (*). Cela posé, soient DE la

---

(*) Soit prise, en effet, la droite dont il s'agit pour axe des x, et supposons le point attiré situé sur l'axe des y, à une distance b de l'origine; l'attraction exercée sur ce point par un élément dx de cette droite sera $\frac{Adx}{b^2+x^2}$, A étant une constante relative à la fois et à la masse de l'élément et à l'intensité de l'attraction. Cette attraction, estimée suivant l'axe des y, sera donc $\frac{Adx}{b^2+x^2} \times \frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{Abdx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; différentielle dont l'intégrale est $\frac{A}{b} \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}$.

Si l'on suppose la droite d'une longueur $2a$, et ayant son milieu à l'origine, on obtiendra l'action totale exercée par cette droite, laquelle s'exer-

droite que l'on considère et A,A′,A″,...., plusieurs points situés avec elle dans un seul et même plan. Si l'on suppose différentes masses $m,m',m'',....$, concentrées sur les points A,A′,A″,....; ce que M. Poncelet nomme *le centre de leurs moyennes harmoniques*, par rapport à la droite DE, ne sera autre chose que le centre des forces parallèles qui solliciteront les masses $m,m',m'',....$, dans des directions perpendiculaires à la droite.

Concevons maintenant que les masses m,m',m'', ..., soient concentrées sur les points A,A′A″,......, situés d'une manière quelconque dans l'espace. Ce que M. Poncelet nomme le centre des moyennes harmoniques des points A,A′,A″,....., relativement à un plan donné DEF, ne sera autre chose que le centre des forces parallèles qui solliciteront ces différens points, dans des directions perpendiculaires au plan, si l'on admet encore que chaque force soit réciproquement proportionnelle à la distance au plan, ce qui revient à supposer l'attraction entre deux points réciproquement proportionnelle au cube de l'intervalle qui les sépare (*). En partant

---

cera uniquement dans le sens des y, en faisant $x=a$ et doublant le résultat; ce qui donnera $\frac{2A}{b}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; fonction qui se réduit simplement à $\frac{2A}{b}$, lorsqu'on suppose $a=\infty$. L'attraction est donc alors inversement proportionnelle à la distance b du point attiré à la droite attirante.

J. D. G.

(*) Tout étant d'ailleurs supposé comme dans la précédente note, supposons que l'attraction soit inversement proportionnelle au cube de la distance; l'attraction exercée par l'élément dx aura alors pour expression $\frac{Adx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette attraction, estimée suivant l'axe des y, sera donc $\frac{Adx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}}=\frac{Abdx}{(b^2+x^2)^2}$; différentielle dont l'intégrale est

$$\frac{A}{2b^2}\left\{\frac{bx}{b^2+x^2}+\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{x}{b}\right)\right\}.$$

des définitions qui précèdent, on établit sans peine les diverses propriétés des centres des moyennes harmoniques.

Ainsi, par exemple, concevons que, les points $A, A', A'', \ldots\ldots$,

---

Si l'on suppose la droite d'une longueur $2a$, et ayant son milieu à l'origine, on obtiendra l'action totale exercée par cette droite, laquelle s'exercera uniquement dans le sens des y, en faisant $x=a$, et doublant le résultat, ce qui donnera

$$\frac{A}{b^2}\left\{\frac{ab}{a^2+b^2}+\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{a}{b}\right)\right\}.$$

Si ensuite on suppose $a=\infty$, le terme $\frac{ab}{a^2+b^2}$ disparaîtra, tandis que le suivant se réduira à $\frac{1}{2}\varpi$; de sorte que l'attraction exercée par la droite sera exprimée par $\frac{A\varpi}{2b^2}$; elle sera donc inversement proportionnelle au quarré de b. Ainsi, l'attraction de tous les élémens d'une droite d'une longueur infinie sur un point situé hors de sa direction, étant inversement proportionnelle au cube de leur distance à ce point, l'action totale de cette droite sur ce même point se réduit à une action perpendiculaire, inversement proportionnelle au quarré de la distance de ce point à cette droite.

Cela posé, soit un plan uniformément matériel, et d'une étendue infinie, considéré comme plan des xy, dont tous les points exercent sur un point de l'axe des z une attraction inversement proportionnelle au cube de la distance. Considérons ce plan comme composé d'élémens rectilignes, d'une longueur infinie, parallèles à l'axe des y. L'action totale de chaque élément se réduira, par ce qui précède, à une action dirigée suivant la droite qui joint le point attiré à l'intersection de cet élément avec l'axe des x, et inversement proportionnel au quarré de la longueur de cette droite. On se trouvera donc dans le même cas que si, le plan attirant étant remplacé par l'axe des x, l'attraction était devenue inversement proportionnelle au quarré de la distance; donc, par la précédente note, l'action totale du plan sur le point attiré se réduira à une action suivant l'axe des z, et inversement proportionnelle à la simple distance de ce point à ce plan.

J. D. G.

étant situés dans un même plan avec la droite DE, on joigne un quelconque D des points de cette droite avec les points A,A′, A″,...., et qu'une parallèle *de* à DE coupe les droites DA,DA′, DA″,...., aux points a,a',a'',..... Si, après avoir pris la droite DE pour axe des x, on désigne par h la distance entre les droites DE et *de*, puis par y,y',y'',....., les ordonnées des points A,A′, A″,........., et si l'on applique à ces points des forces parallèles $P=\frac{m}{y}$, $P'=\frac{m'}{y'}$, $P''=\frac{m''}{y''}$, ...; la force $P=\frac{m}{y}$ pourra être remplacée par deux composantes parallèles, l'une égale à $\frac{m}{h}$, appliquée au point a, et l'autre appliquée au point D. Donc, le système des forces P,P',P'',..., pourra être remplacé par des forces $\frac{m}{h}$, $\frac{m'}{h'}$, $\frac{m''}{h''}$, ..., appliquées aux points a,a',a'',....., et par la résultante des forces appliquées au point D. Donc la droite qui joindra le point D avec le centre de gravité G des masses m,m', m'',...., concentrées sur les points a,a',a'',......, passera par le centre des forces parallèles P,P′,P″,......, ou, ce qui revient au même, par le centre des moyennes harmoniques des masses m,m',m'', ..., concentrées sur les points A,A′,A″,.... Cette proposition continuera de subsister si les points A,A′,A″,...... changent de position sur les droites DA,DA′,DA″,.... Or, on peut imaginer que, par suite du changement de position, ils se rangent sur une nouvelle droite KL, qui soit parallèle à DE, ou qui viennent recontrer DE en un point donné E; et comme, dans ce dernier cas, le centre des moyennes harmoniques des points A,A′,A″,....., restera le même, par rappport à toutes les droites qui passeront par le point E, on pourra le nommer centre des moyennes harmoniques des points A, A′,A″,...., relatif au point L. Les remarques précédentes fournissent les principales propriétés du centre des moyennes harmoniques de plusieurs points situés dans un plan.

Concevons encore que, les points A,A′,A″,...... étant placés à

volonté dans l'espace, on trace dans un plan donné DEF, une droite quelconque DE, et qu'ayant coupé les plans DEA,DEA′,DEA″, ... par un nouveau plan *def*, parallèle à DEF, on prenne, sur les droites d'intersection, des points quelconques a,a',a'',.... Si, après avoir choisi le plan DEF pour plan des xy, on désigne par h sa distance au plan *def*, puis par z,z',z'', ..., les ordonnées des points A,A′, A″,....., et si l'on applique à ces mêmes points des forces parallèles $P=\frac{m}{z}$, $P'=\frac{m'}{z'}$, $P''=\frac{m''}{z''}$, ..., la force $P=\frac{m}{z}$, appliquée au point A, pourra être remplacée par deux forces parallèles, l'une égale à $\frac{m}{h}$, appliquée au point a et l'autre appliquée au point d'intersection de la droite Aa avec la droite DE. Donc le système des forces P,P', P'',..., pourra être remplacé par des forces $\frac{m}{h}$, $\frac{m'}{h'}$, $\frac{m''}{h''}$, ..., appliquées aux points a,a',a'',....., et par la résultante des forces appliquées à différens points de la droite DE.

Donc le plan qui renfermera la droite DE et le centre de gravité G des masses m,m',m'',......, concentrées sur les points a,a', a'',...., passera par le centre des forces parallèles P,P',P'', ..., ou, ce qui revient au même, par le centre des moyennes harmoniques des masses m,m',m'', ..., concentrées sur les points A,A′, A″,..... Cette proposition continuera de subsister, si les points A, A′,A″,.... changent de position dans les plans DEA,DEA′,DEA″,.... Or, on peut imaginer que, par suite du changement de position, les points dont il s'agit soient ramenés dans un nouveau plan qui soit parallèle à DEF, ou qui coupe DEF suivant une droite donnée KL, et il est clair que, dans le dernier cas, le centre des moyennes harmoniques des points A,A′,A″,..., relatif au plan DEF, sera aussi le centre des moyennes harmoniques relatif à la droite KL. Observons d'ailleurs que, si l'on suppose les points A,A′A″,....., situés sur les droites AD,A′D,A″D,....., menées des points A,A′, A″,.... au point D, les composantes de P,P',P'', ..., précédemment

appliquées à divers points de la droite DE, passeront par le point D, et qu'en conséquence le centre des moyennes harmoniques des points $A,A',A'',\ldots$ sera situé sur le prolongement de DG, G désignant toujours le centre de gravité des points $a,a',a'',\ldots$

Les divers théorèmes que nous venons d'établir, et quelques autres que l'on déduit facilement des premiers, ont été démontrés par M. Poncelet, à l'aide d'une méthode très-différente de celle que nous venons de suivre. De plus, après avoir établi les propriétés du centre des moyennes harmoniques, l'auteur en a fait quelques applications ingénieuses, parmi lesquelles nous avons remarqué la construction d'une échelle harmonique, à l'aide d'un procédé fort simple, qui exige seulement l'emploi de la règle.

En partant de la définition que nous avons donnée du centre des moyennes harmoniques, il serait facile de déterminer analitiquement ce même centre. En effet, supposons les masses m',m'', $m''',\ldots$, respectivement concentrées sur des points (x',y',z'), (x'',y'',z''), (x''',y''',z'''), ..., et cherchons les coordonnées x,y,z, du centre des moyennes harmoniques de ces masses, par rapport au plan des xy.

En faisant pour abréger,

$$P'=\frac{m'}{z'}\,,\quad P''=\frac{m''}{z''}\,,\quad P'''=\frac{m'''}{z'''}\,,\ \ldots\ldots$$

et désignant par P la résultante des forces $P',P'',P''',\ldots\ldots$, on aura

$$(1)\qquad P=P'+P''+P'''+\ldots\ldots=\frac{m'}{z'}+\frac{m''}{z''}+\frac{m'''}{z'''}+\ldots\ldots=\Sigma\frac{m'}{z'}\ ;$$

et, comme on aura de plus, en vertu des formules relatives au centre des forces parallèles,

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l} Px=\Sigma(P'x')=\Sigma\dfrac{m'x'}{z'}\ , \\[2ex] Py=\Sigma(P'y')=\Sigma\dfrac{m'y'}{z'}\ , \\[2ex] Pz=\Sigma(P'z')=\Sigma m'\ , \end{array}\right.$$

on en conclura

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{P}\Sigma\dfrac{m'x'}{z'}\ ; \\[2ex] y=\dfrac{1}{P}\Sigma\dfrac{m'y'}{z'}\ , \\[2ex] z=\dfrac{1}{P}\Sigma m'. \end{array}\right.$$

Ces diverses formules s'étendent au cas même où $m, m', m'', \ldots$ représenteraient les masses des divers élémens d'un corps solide divisé en une infinité de parties; alors elles se réduiraient à

$$(4)\qquad R=\iiint\frac{\rho}{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ ,$$

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l} X=\dfrac{1}{R}\displaystyle\iiint\dfrac{\rho x}{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ , \\[2ex] Y=\dfrac{1}{R}\displaystyle\iiint\dfrac{\rho y}{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ , \\[2ex] Z=\dfrac{1}{R}\displaystyle\iiint\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ , \end{array}\right.$$

ρ désignant la densité de la molécule située en (x,y,z) et (X,Y,Z)

étant le centre des moyennes harmoniques demandé. Si, pour fixer les idées, on cherche le centre des moyennes harmoniques d'une sphère homogène décrite avec le rayon r, et dont le centre soit placé sur l'axe des z, à la distance h du plan des xy, on reconnaîtra que ce centre est lui-même situé sur l'axe des z à une distance Z de l'origine, la valeur de Z étant

$$(6) \qquad Z = \frac{h}{3} \cdot \frac{r^3}{2hr + (r^2 - h^2)\,l\left(\frac{h+r}{h-r}\right)}.$$

Si la valeur de h est très-grande, par rapport au rayon r, la valeur précédente de Z, ou

$$Z = \frac{h}{3} \cdot \frac{r^3}{2hr + 2(r^2 - h^2)\left(\frac{r}{h} + \frac{1}{3}\frac{r^3}{h^3} + \ldots\right)} = h + \ldots$$

deviendra sensiblement égale à h; et par conséquent le centre des moyennes harmoniques se confondra sensiblement avec le centre de la sphère, comme on devait s'y attendre.

Soient maintenant v', v'', v''', ..., les coordonnées des points A', A'', A''',..., relatives à un plan quelconque, perpendiculaire ou oblique au plan des xy; c'est-à-dire, en d'autres termes, les distances des points A', A'', A''', ..., au nouveau plan, prises tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, suivant qu'elles se comptent dans un sens ou dans un autre. Soit de même v la distance du centre des moyennes harmoniques des points A', A'', A''',..., au nouveau plan dont il s'agit. On aura, en vertu des propriétés connues du centre des forces parallèles,

$$(7) \qquad Pv = \Sigma(P'v'),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8) \qquad \nu\Sigma\frac{m'}{z'}=\Sigma\frac{m'\nu'}{z'}.$$

Cette dernière formule comprend, comme cas particuliers, les formules (2), et celles que M. Poncelet a établies relativement au centre des moyennes harmoniques de plusieurs points situés en ligne droite.

Le mémoire de M. Poncelet est précédé d'un discours préliminaire qui offre une sorte de résumé de ses recherches sur la géométrie, et d'une note sur les moyens d'exprimer que quatre points, appartenant respectivement à quatre droites qui convergent vers un point unique, sont compris dans un seul et même plan. Dans le discours préliminaire, l'auteur insiste de nouveau sur la nécessité d'admettre en géométrie ce qu'il appelle le principe de *continuité*. Nous avons déjà discuté ce principe, dans un rapport fait, il y a plusieurs années, sur un autre mémoire de M. Poncelet (*), et nous avons reconnu que ce principe n'était, à proprement parler, qu'une forte induction qui ne pouvait être indistinctement appliquée à toutes sortes de questions de géométrie, ni même en analise. Les raisons que nous avons données, pour fonder notre opinion, ne sont pas détruites par les considérations que l'auteur a développées dans son traité des propriétés projectives.

Quoi qu'il en soit, nous pensons que le mémoire de M. Poncelet sur les centres de moyennes harmoniques fournit de nouvelles preuves de la sagacité de son auteur, dans la recherche des

---

(*) Voyez ce rapport à la page 69 du XI.me volume du présent recueil.

J. D. G.

propriétés des figures, et qu'il mérite, sous ce rapport, l'approbation de l'Académie.

Signés, AMPÈRE; LEGENDRE; CAUCHY, *rapporteur.*

L'Académie adopte les conclusions de ce rapport.

Certifié conforme :

Le secrétaire perpétuel, pour les sciences mathématiques,

Signé, le B.on FOURIER.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de probabilité.

On demande quel serait l'avantage du banquier, au jeu de *trente et quarante*, en supposant *infini* le nombre des jeux de cartes entiers dont la taille se compose, et en admettant d'ailleurs toutes les autres conditions du trente et quarante ordinaire (*) ?

(*) La solution de cette question, beaucoup plus simple que celle qui a été traitée par M. Poisson (pag. 173), peut être fort propre à montrer quelle influence exerce, sur l'avantage du banquier, le nombre des jeux dont la taille se compose.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

De la nature et des propriétés principales des sections planes de toute surface conique du second ordre ;

Par M. GERGONNE.



SOIT une droite rapportée à trois axes de direction arbitraire. Supposons que cette droite passe par l'origine des coordonnées, et prenons pour ses deux équations

$$x=mz\,, \qquad y=nz\,. \qquad (1)$$

Si m et n sont donnés, cette droite sera absolument déterminée de situation et unique dans l'espace. Si, au contraire, ces deux coefficiens sont, à la fois, indéterminés et indépendans, les équations ci-dessus pourront, suivant les valeurs qu'on voudra attribuer à m et n, exprimer indistinctement toutes les droites qui peuvent être menées dans l'espace, par l'origine.

Mais m et n, sans être déterminés ni indépendans, peuvent être liés par une relation, telle que

$$\varphi(m,n)=0\,. \qquad (2)$$

Alors, les équations (1) n'exprimeront plus ni une droite unique ni la totalité des droites qu'on peut mener dans l'espace par l'origine des coordonnées, mais seulement une certaine série de ces droites, c'est-à-dire, des droites se succédant sans interruption dans

l'espace, et formant conséquemment, par leur ensemble, une surface conique ayant son sommet ou centre à l'origine. Voyons quelle est l'équation générale de cette surface.

En résolvant l'équation (2) par rapport à n, on en tirera une valeur de cette forme

$$n=\psi(m) ;$$

qui, substituée dans la dernière des équations (1), les changera en celle-ci

$$x=mz , \qquad y=z.\psi(m) , \qquad (3)$$

qui exprimeront, par leur ensemble, l'intersection de deux plans variables, passant respectivement par les axes des y et des x; laquelle intersection sera constamment une des génératrices de la surface conique dont il s'agit, quelque valeur d'ailleurs qu'on attribue à m.

Mais, lorsqu'une ligne est donnée par l'intersection de deux surfaces, toute combinaison qu'on voudra faire des équations de ces deux surfaces sera l'équation d'une troisième surface contenant cette même ligne ; donc, toute combinaison qu'on voudra faire des équations (3) sera l'équation d'une surface contenant la génératrice de la surface conique qui répond à toute valeur déterminée de m.

Donc, en particulier, l'équation résultant de l'élimination de m, entre les équations (3), sera l'équation d'une surface contenant, pour chaque valeur qu'on voudra donner à m, l'une des génératrices de la surface conique. Mais, cette équation, ne renfermant plus m, demeurera constamment la même, quelque valeur qu'on donne à ce paramètre variable ; donc, la surface qu'elle exprimera contiendra, à la fois, toutes les génératrices, et sera conséquemment l'équation même de la surface conique dont il s'agit.

La recherche de la surface conique, lieu de toutes les droites

données par les équations (1) et (2), se réduit donc, comme l'on voit, à tirer de l'équation (2) la valeur de n, pour la porter dans la dernière des équations (1), et à éliminer ensuite m entre la première de ces équations et l'équation résultante.

Mais ce calcul revient évidemment à éliminer m et n entre les équations (1) et (2), et doit nécessairement conduire au même résultat, de quelque manière d'ailleurs que l'on procède à l'élimination de ces deux paramètres; donc on parviendra également à l'équation de la surface conique dont il s'agit, en mettant simplement pour m et n, dans l'équation (2), leurs valeurs données par les équations (1); donc finalement l'équation de la surface conique dont il s'agit, et, par suite, l'équation générale de toutes les surfaces coniques qui ont leur sommet ou centre à l'origine, est

$$\varphi\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0\ ;$$

équation dans laquelle φ désigne une fonction tout-à-fait arbitraire (*).

Il suit de là, en particulier, que l'équation générale des surfaces coniques du second ordre qui ont leur sommet ou centre à l'origine est de la forme

(*) On brusque d'ordinaire cette conclusion, en s'étayant d'une certaine propriété de l'élimination. Mais on sent qu'à moins de démontrer préalablement cette propriété, *à priori*, ce qui ne paraît pas facile, l'élève n'y peut voir qu'une sorte de qualité occulte, dont l'emploi, dans les sciences exactes, doit lui paraître assez surprenant.

Nous ne prétendons pas, au surplus, que l'on soit tenu de répéter le long raisonnement que nous venons de faire toutes les fois qu'on se retrouvera dans les mêmes circonstances; mais nous pensons que du moins il faudra le répéter aussi long-temps que l'élève ne sera pas en état de le suppléer facilement de lui-même.

$$A\left(\frac{x}{z}\right)^2+B\left(\frac{y}{z}\right)^2+2C\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}+2A'\frac{x}{z}+2B'\frac{y}{z}+C'=0 ;$$

c'est-à-dire ,

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'xz+2B'yz+C'z^2=0 . \quad (4)$$

Soit coupée cette surface par un plan parallèle au plan des xy, et conséquemment par un plan quelconque, puisque le plan des xy est supposé de direction quelconque par rapport à elle. En désignant par k la distance entre ces deux plans, mesurée parallèlement à l'axe des z, l'équation de la projection de la section sur le plan des xy sera

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'kx+2B'ky+C'k^2=0 ; \quad (5)$$

et cette section, comme l'on sait, sera appelée

Ellipse, si l'on a $C^2-AB<0$,

Parabole, si l'on a $C^2-AB=0$,

Hyperbole, si l'on a $C^2-AB>0$.

D'un autre côté, si, dans l'équation (4), on fait $z=0$, l'équation résultante

$$Ax^2+By^2+2Cxy=0 , \quad (6)$$

sera celle de la section de la surface conique par le plan des xy, c'est-à-dire, par un plan mené par son sommet, parallèlement au plan coupant. Or, en résolvant cette dernière équation par rapport à y, on démontre aisément qu'elle exprime

Un point . . . . si l'on a $C^2-AB<0$,

Deux droites qui se confondent, si l'on a $C^2-AB=0$,

Deux droites qui se coupent, si l'on a $C^2-AB>0$,

donc, *un plan coupe une surface conique du second ordre suivant une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le plan parallèle à celui-là, conduit par le sommet de cette surface conique, est hors d'elle, la touche ou la coupe.* Or, comme ce sont là les trois seuls cas qui puissent se présenter, il s'ensuit qu'on n'aura jamais, pour les sections planes d'une surface conique du second ordre, que les trois courbes que nous venons de signaler et que de plus on pourra les avoir toutes. On voit en même temps que la parabole tient le milieu entre les ellipses et les hyperboles; de sorte qu'elle est à la fois la dernière des ellipses et la première des hyperboles.

Si l'on imagine que la distance k diminue sans cesse, jusqu'à devenir nulle, on verra en outre que le *point* est un cas particulier de l'*ellipse*, que *deux droites qui se confondent* sont un cas particulier de la *parabole*, et qu'enfin *deux droites qui se coupent* sont un cas particulier de l'*hyperbole.*

Si l'on conçoit que le sommet de la surface conique s'éloigne à l'infini, cette surface deviendra une surface cylindrique. On ne pourra plus avoir alors ni des sections paraboliques ni des sections hyperboliques, qui se trouveront remplacées par des droites parallèles. Il se pourra aussi alors que le plan et la surface cylindrique ne se coupent pas.

A la page 61 du tome V.^{e} du présent recueil, nous avons démontré fort simplement que les courbes comprises dans l'équation (5) sont telles 1.º que les milieux de toutes leurs cordes parallèles à

une droite fixe quelconque sont tous sur une autre droite que nous avons appelée *diamètre*, et qui a les tangentes à ses extrémités parallèles à la droite fixe ; 2.° que tous les diamètres de l'*ellipse* et de l'*hyperbole* se coupent en un même point qui en est le milieu commun, et que nous avons appelé le *centre* de la courbe, tandis que, dans la *parabole*, tous les diamètres sont *parallèles* ; 3.° qu'à un quelconque des diamètres de l'*ellipse* ou de l'*hyperbole*, il en répond toujours un autre, qui en est dit le *conjugué*, tels que chacun d'eux contient les milieux des cordes parallèles à l'autre ; 4.° que, parmi les systèmes de diamètres conjugués de ces deux courbes, en nombre infini, il en est un, et un seul, dans lequel ces deux diamètres, qui sont dits alors les *diamètres principaux* ou les *axes* de la courbe, sont perpendiculaires l'un à l'autre ; 5.° qu'enfin, parmi les diamètres de la *parabole*, il en est un, et un seul, qui est perpendiculaire à la tangente à son extrémité : c'est le *diamètre principal* ou l'*axe* de la courbe.

On conclut de là 1.° qu'en prenant pour axes des coordonnées, dans l'ellipse, deux diamètres conjugués quelconques, et représentant leurs longueurs respectives par $2a$ et $2b$, l'équation de la courbe prend cette forme fort simple

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1; \qquad (7)$$

ce qui veut dire que, *dans l'ellipse, la somme des quarrés des rapports des deux coordonnées d'un même point aux moitiés des diamètres conjugués auxquels elles sont respectivement parallèles est constamment égale à l'unité.*

2.° Dans les mêmes circonstances, l'équation de l'hyperbole prend la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1; \qquad (8)$$

la courbe a alors un diamètre réel $2a$, tandis que son conjugué $2b\sqrt{-1}$ a une longueur imaginaire, et c'est alors *la différence des quarrés des rapports des coordonnées d'un même point de la courbe aux moitiés des diamètres auxquels elles sont respectivement parallèles qui est constamment égale à l'unité.*

3.° Enfin, dans la parabole, si l'on prend un diamètre quelconque pour axe des x et la tangente à son extrémité pour axe des y, l'équation de la courbe prend cette forme très-simple

$$y^2=4cx\,. \qquad (9)$$

Supposons que, dans les équations (7), (8), (9) les coordonnées soient rectangulaires. On tire de l'équation (7)

$$y^2=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}\,,$$

en ajoutant tour-à-tour aux deux membres

$$(x+\sqrt{a^2-b^2})^2 \qquad \text{et} \qquad (x-\sqrt{a^2-b^2})^2\,,$$

on aura

$$(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2=\left\{\frac{a^2+x\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right\}^2,$$

$$(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2=\left\{\frac{a^2-x\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right\}^2,$$

extrayant les racines quarrées des deux membres de ces deux équations, en remarquant que, par la nature de la courbe, x ne pouvant être plus grand que a, les racines des deux membres doivent être de mêmes signes, on aura

$$\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}=\frac{a^2+x\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,,$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}=\frac{a^2-x\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,; \qquad (10)$$

d'où, en ajoutant membre à membre et réduisant,

$$\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}+\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}=2a\,.$$

Or, les deux radicaux du premier membre de cette dernière équation expriment les distances de l'un quelconque des points de la courbe à deux points de l'axe des x, pris à des distances $\sqrt{a^2-b^2}$ de part et d'autre de l'origine; donc, *la somme des distances des divers points de l'ellipse à deux points fixes, pris sur son plan, est une quantité constante.* Ces points sont ce qu'on appelle les *foyers* de la courbe.

Ce qui précède suppose qu'on a $a>b$. Dans cette hypothèse, si l'on répète le calcul que nous venons de faire, en traitant b et y comme nous avons traité a et x, et *vice versâ*, on s'assurera de l'existence de deux *foyers imaginaires*, sur le plus petit des deux axes de la courbe (*).

L'équation (10) peut être mise sous cette forme

$$\frac{\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}}{a^2-x\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{1}{a}\,,$$

puis sous celle-ci

(*) Voyez, sur ce sujet, la page 317 du VIII.e volume du présent recueil.

$$\frac{\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}-x}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1 . \qquad (11)$$

Or, le premier membre de cette équation est le rapport entre la distance de l'un quelconque des points de la courbe à l'un des foyers et la distance du même point à une perpendiculaire à l'axe des x, menée à la distance $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ de l'origine; donc, *les distances des divers points de l'ellipse à un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant.* On voit que le point fixe dont il s'agit ici est l'un des *foyers*. Quant à la droite fixe, on s'assurera aisément qu'elle en est la *polaire*.

Si, dans l'équation (7), ainsi que dans les diverses transformées que nous en avons successivement déduites, on change $+b^2$ en $-b^2$, on obtiendra les transformées analogues relatives à l'hyperbole donnée par l'équation (8); et l'on sera conduit aux deux équations

$$(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2=\left\{\frac{a^2+x\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right\}^2 ,$$

$$(x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2=\left\{\frac{a^2-x\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right\}^2 ;$$

mais ici, où x est toujours plus grand que a, il faudra, dans l'extraction des racines, écrire

$$+\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}=\frac{a^2+x\sqrt{a^2+b^2}}{a} ,$$

$$-\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}=\frac{a^2-x\sqrt{a^2+b^2}}{a} ; \qquad (12)$$

d'où, en ajoutant et réduisant

$$\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}-\sqrt{(x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}=2a\ .$$

Or, les radicaux du premier membre expriment les distances de l'un quelconque des points de la courbe à deux points de l'axe des x pris à des distances $\sqrt{a^2+b^2}$ de part et d'autre de l'origine; donc *la différence des distances des divers points de l'hyperbole à deux points fixes pris sur son plan, est une quantité constante.* Ces points sont ce qu'on appelle les *foyers* de la courbe.

En traitant l'équation (12) comme nous avons traité l'équation (10), on parviendra à lui donner cette forme

$$\frac{\sqrt{(x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}}{x-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1\ ; \qquad (13)$$

ce qui, pour les mêmes raisons que ci-dessus, montre que *les distances de divers points de l'hyperbole à un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant.* On voit qu'ici encore le point fixe dont il s'agit est l'un des *foyers*, tandis que la droite fixe en est la *polaire.*

L'équation (9) de la parabole peut être écrite ainsi :

$$y^2=(x+c)^2-(x-c)^2\ ;$$

d'où, en transposant et extrayant la racine quarrée des deux membres;

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=x+c$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{x+c}=1\ ; \qquad (14)$$

c'est-à-dire que *les distances des divers points de la parabole à*

un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant. Le point fixe est ce qu'on appelle le *foyer* de la courbe; et il est facile de s'assurer que la droite fixe est la *polaire* de ce point.

C'est donc une propriété commune à toutes les sections coniques que la constance du rapport des distances de leurs divers points à un point et à une droite fixe; rapport *plus petit que l'unité* pour *l'ellipse*, *égal à l'unité* pour la *parabole* et *plus grand que l'unité* pour l'*hyperbole*.

La droite qui va de l'un des foyers d'une section conique à l'un quelconque des points de la courbe est dite le *rayon vecteur* de cette courbe; l'angle que fait ce rayon vecteur avec l'axe qui contient les foyers est appelé l'*anomalie*; la distance d'un foyer au centre est dite l'*excentricité*, et la double ordonnée qui passe par ce foyer est ce qu'on appelle le *paramètre*.

Représentons, pour l'ellipse, par r le rayon vecteur, par θ l'anomalie, par p le paramètre et par ε le rapport de l'excentricité au demi-grand axe; nous aurons

$$r=\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}$$

$$\mathrm{Cos}.\theta=\frac{x-\sqrt{a^2-b^2}}{r}\,,\quad p=\frac{2b^2}{a}\,,\quad \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

de là nous conclurons $x=r\mathrm{Cos}.\theta+\sqrt{a^2-b^2}=a\varepsilon+r\mathrm{Cos}\,\theta$, et par conséquent

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}-x=\frac{a}{\varepsilon}-a\varepsilon-r\mathrm{Cos}.\theta=\frac{a(1-\varepsilon^2)-\varepsilon r\mathrm{Cos}.\theta}{\varepsilon}=\frac{\frac{1}{2}p-\varepsilon r\mathrm{Cos}.\theta}{\varepsilon}\,.$$

En substituant toutes ces valeurs dans l'équation (11), elle deviendra

$$\frac{r}{\frac{1}{2}p-\varepsilon r\mathrm{Cos}.\theta}=1\;;$$

d'où on tirera

$$r=\frac{\frac{\varepsilon}{2}p}{1+\varepsilon\text{Cos.}\theta}\,. \qquad (15)$$

et une transformation analogue, appliquée à l'équation (13) conduirait exactement au même résultat.

Quant à la parabole, on a pour cette courbe

$$r=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,,\quad p=4c\,,\quad \text{Cos.}\theta=\frac{c-x}{r}\,;$$

d'où

$$x=c-r\text{Cos.}\theta\,,\quad \text{et}\quad x+c=2c-r\text{Cos.}\theta=\frac{1}{2}p-r\text{Cos.}\theta\,,$$

au moyen de quoi l'équation (14) devient

$$\frac{r}{\frac{1}{2}p-r\text{Cos.}\theta}=1\,,$$

et donne

$$r=\frac{\frac{1}{2}p}{1+\text{Cos.}\theta}\,.$$

Ainsi l'équation (15) qu'on appelle l'*équation polaire* des sections coniques, convient généralement à toutes ces courbes qui sont ellipses, paraboles ou hyperboles, suivant qu'on a $\varepsilon<1$, $\varepsilon=1$ ou $\varepsilon>1$.

En ajoutant à ce qu'on vient de lire, les dix pages de notre V.e volume rappelées ci-dessus, on obtiendrait un traité de sections coniques qui, bien que fort court, serait néanmoins presque complet.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Théorèmes sur l'ellipse ;

Par M. FERRIOT, Doyen de la Faculté des sciences de Grénoble.

THÉORÈME I. *Dans tout parallélogramme circonscrit à une ellipse, les diagonales se coupent au centre et suivent les directions de deux diamètres conjugués.*

Démonstration. L'ellipse dont il s'agit peut toujours être projetée orthogonalement sur un plan tellement situé que sa projection soit un cercle, et il est visible que le centre de ce cercle sera la projection du centre de la courbe. La projection du parallélogramme sera un parallélogramme circonscrit au cercle, et conséquemment un rhombe, dont les deux diagonales, projections des deux diagonales du parallélogramme circonscrit à l'ellipse, se couperont perpendiculairement au centre de ce cercle, dont elles seront conséquemment deux diamètres conjugués ; donc les diagonales de l'ellipse, dont elles seront les projections, en seront aussi deux diamètres conjugués.

Corollaire. Il suit de là que le lieu des sommets de tous les rectangles circonscrits à une ellipse est la circonférence d'un cercle de même centre que cette ellipse.

Considérons en effet un de ces rectangles. Prenons les directions de ses diagonales, que nous venons de voir être celles de deux diamètres conjugués, pour celles des axes des coordonnées et re-

présentons par $2a$ et $2b$ les longueurs de ces deux diamètres, l'équation de la courbe sera conséquemment

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Soit (x',y') le point de contact de l'ellipse avec un des côtés du rectangle, de manière qu'on ait

$$b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2; \qquad (1)$$

ce côté déterminera, sur les axes des coordonnées, des segmens égaux entre eux et à la moitié de la diagonale du rectangle ; et, en représentant par r la longueur de cette demi-diagonale, on aura, par les principes connus sur les sous-tangentes,

$$r=\frac{a^2}{x'}=\frac{b^2}{y'},$$

d'où

$$x'=\frac{a^2}{r}, \quad y'=\frac{b^2}{r}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1) et réduisant, on en tirera

$$a^2+b^2=r^2;$$

or, le premier membre de cette dernière équation est constant, quel que soit le rectangle circonscrit ; donc le second l'est aussi ; donc tous les rectangles circonscrits à une même ellipse ont leurs diagonales de même longueur ; donc ils ont tous leurs sommets sur une même circonférence qui a son centre au centre même de l'ellipse.

THÉORÈME II. L'ellipse est toujours partagée en quatre portions

équivalentes, par un système quelconque de diamètres conjugués.

Démonstration. Concevons une ellipse divisée en quatre portions par deux diamètres conjugués quelconques, et soit projetée orthogonalement cette ellipse sur un plan tellement situé par rapport au sien que la projection soit un cercle; les projections de ses diamètres conjugués seront deux diamètres de ce cercle se coupant à angles droits et divisant conséquemment sa surface en quatre parties égales; mais les quatre portions correspondantes de l'ellipse auront pour mesure ces mêmes parties divisées par le cosinus de l'angle des deux plans; donc en effet, ces quatre portions sont équivalentes.

THÉORÈME III. Le lieu des sommets de tous les parallélogrammes conjugués circonscrits à une même ellipse est une autre ellipse concentrique à la première, qui lui est semblable et qui est semblablement située.

Démonstration. Soit projetée orthogonalement l'ellipse, avec tous ses parallélogrammes conjugués circonscrits, sur un plan tellement situé par rapport au sien que la projection soit un cercle; les projections des parallélogrammes conjugués seront des quarrés circonscrits à ce cercle lesquels auront conséquement leurs sommets sur un autre cercle concentrique à celui-là. Les projections de l'ellipse et du lieu des sommets des parallélogrammes conjugués sont donc deux cercles concentriques; ce lieu est donc une autre ellipse concentrique à la première, semblable à elle et semblablement située sur son plan.

THÉORÈME IV. Si deux ellipses tracées sur un même plan, sont à la fois concentriques, semblables et semblablement situées sur ce plan, toute corde de la plus grande tangente à la plus petite la touchera au milieu de sa longueur.

Démonstration. On pourra toujours, en effet, projeter orthogonalement la figure sur un plan tel que sa projection soit le système de deux cercles concentriques; et la proposition étant évidemment

vraie pour la projection de la corde, elle devra l'être aussi pour cette corde elle-même (*).

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Sur la tangente à la spirale conique;

Extrait d'une lettre au Rédacteur des *Annales*;

Par M. VALLÈS, élève à l'Ecole polytechnique.



Si, tandis que la génératrice d'un cône droit se meut uniformément sur la surface convexe de ce cône, un point parti du sommet parcourt uniformément cette génératrice mobile, ce point tracera, dans l'espace, une courbe à double courbure, que M. Garbinski (pag. 167) a appelée *spirale conique*, et à laquelle il s'est proposé de mener une tangente, par un quelconque de ses points.

La tangente à une courbe à double courbure, en un quelconque de ses points, est, comme l'on sait, la commune section des plans tangens menés, par le même point, à deux surfaces dont cette courbe est l'intersection. Ici on peut prendre pour l'une de ces surfaces la surface même du cône, pour laquelle rien n'est plus facile que de construire le plan tangent en un quelconque de ses points. M. Garbinski prend pour l'autre le lieu géométrique des perpen-

(*) Ceci peut être considéré comme faisant suite à un autre article de M. Ferriot inséré à la page 240 du II.e volume du présent recueil.

J. D. G.

diculaires abaissées sur l'axe de ce cône des différens points de la spirale conique, et il prouve très-simplement que cette dernière surface est une hélicoïde, à laquelle conséquemment il s'agit de mener un plan tangent par le même point. M. Garbinski, pour y parvenir, suit la grande route, par laquelle on est toujours sûr d'arriver un peu plus tôt ou un peu plus tard; mais il me semble que la nature individuelle du problème permet de résoudre la question sans recourir à la considération du paraboloïde hyperbolique, ou de toute autre surface auxiliaire, tangente à celle pour laquelle on se propose de construire le plan tangent.

Le plan tangent à une surface, en un quelconque de ses points, est déterminé par les tangentes à deux sections faites à cette surface en ce même point. Lorsqu'il s'agit d'une hélicoïde, on peut prendre, pour une de ces droites, la génératrice de l'hélicoïde en ce point. Pour avoir l'autre, concevons, par le même point, un cylindre de révolution, ayant même axe que l'hélicoïde; ces deux surfaces se couperont suivant une hélice, dont la tangente au point dont il s'agit pourra être prise pour la seconde de nos deux droites.

En conservant la figure de l'endroit cité, la trace horizontale de l'hélice sera le cercle décrit du point C′ comme centre et avec C′M′ pour rayon; la trace horizontale de la tangente à cette hélice, au point M, sera donc la tangente M′Q à ce cercle, au point M′. Quant au point où cette tangente percera le plan horizontal, on le déterminera en prenant sur la tangente projetée, à partir du point M′ une longueur égale à celle de l'arc de notre cercle compris entre les rayons C′A′ et C′M′. Or on voit aisément qu'en menant en H′, au cercle dont le rayon est C′H′, une tangente H′P′ égale en longueur à l'arc A′H′ et menant C′P′ coupant en Q la tangente à notre premier cercle en M′, la longueur M′Q sera précisément celle que doit avoir cette tangente. On retombe donc ainsi exactement, mais par des considérations beaucoup plus simples, sur la construction de M. Garbinski.

GÉOMETRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur les axes, plans et centres radicaux;

Par M. SARRUS, docteur agrégé ès sciences.

ON a pu voir en divers endroits de ce recueil, et notamment à la page 193 du XIII.e volume, de quelle importance sont aujourd'hui, dans la géométrie élémentaire, les propriétés des pôles, polaires et plans polaires, celles des centres, axes et plans de similitude et enfin celles des axes, plans et centres radicaux.

Les géomètres de l'école de Monge, en recourant à la géométrie à trois dimensions, sont parvenus à démontrer fort simplement et sans calcul les propriétés fondamentales des pôles, polaires et plans polaires, ainsi que celles des centres, axes et plans de similitude; mais la chose est encore à faire à l'égard des axes, plans et centres radicaux. Il nous paraît qu'on peut y parvenir au moyen des considérations suivantes:

1.° Deux cercles égaux étant tracés sur un même plan, il est manifeste, ou tout au moins très-facile de démontrer, que la perpendiculaire indéfinie sur le milieu de la droite qui joint leurs centres, contient tous les points et les seuls points de leur plan desquels on puisse leur mener des tangentes de même longueur.

2.° On en conclut cette autre proposition, d'une évidence à peu près égale, que les points du plan perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les centres de deux sphères égales ont tous et ont exclusivement cette propriété que les tangentes menées de chacun d'eux aux deux sphères sont de même longueur.

3.° Soient présentement deux cercles inégaux, tracés sur un même plan, et soit P un des points de ce plan desquels on peut leur

mener des tangentes de même longueur. On peut toujours considérer ces deux cercles comme les intersections de leur plan avec deux sphères d'un même rayon quelconque, pourvu que ce rayon ne soit pas moindre que celui du plus grand des deux cercles; et les tangentes menées du point P à ces deux cercles le seront aussi aux deux sphères.

4.° Donc (2) le point P est un des points du plan perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les centres des deux sphères; et par conséquent tous les points P du plan des deux cercles desquels on peut leur mener des tangentes de même longueur, appartiennent en même temps au plan perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les centres des deux sphères; donc tous ces points P sont à l'intersection des deux plans, et par conséquent sur une même droite. Il est aisé de voir d'ailleurs que cette droite est perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux cercles; ainsi, *tous les points du plan de deux cercles desquels on peut leur mener des tangentes de même longueur appartiennent a une droite indéfinie, perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres.* C'est cette droite qu'on appelle l'*axe radical* des deux cercles, et qu'on sait être leur tangente ou leur corde commune, dans le cas particulier où ces deux cercles se touchent ou se coupent.

5.° On conclut facilement de là que *tous les points de l'espace desquels on peut mener à deux sphères des tangentes de même longueur appartiennent à un plan indéfini, perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres.* C'est ce plan qu'on appelle le *plan radical* des deux sphères, et qu'on sait être leur plan tangent commun ou le plan de leur intersection, dans le cas particulier où les deux sphères se touchent ou se coupent.

6.° De ce qui vient d'être démontré (4) on conclut, sur-le-champ, que *les axes radicaux de trois cercles, tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, passent tous trois par un même point.* C'est ce point qu'on appelle le *centre radical* des trois cercles. C'est le seul point du plan de ces trois cercles du-

quel on puisse leur mener des tangentes de même longueur. On pourra donc, en faisant varier le troisième cercle, soit de grandeur soit de situation, soit de l'un et de l'autre à la fois, mais de manière qu'il coupe toujours les deux premiers, obtenir deux points de l'axe radical de ces deux-ci, et par suite cet axe radical lui-même, dans le cas où ces deux cercles n'auraient aucun point commun.

7.° De la proposition démontrée (5) on conclut facilement que *les plans radicaux de trois sphères prises successivement deux à deux, passent tous trois par une même droite perpendiculaire au plan qui joint leur centre*. C'est cette droite qu'on appelle l'*axe radical* des trois sphères. C'est le lieu des points de l'espace desquels on peut mener à ces trois sphères des tangentes de même longueur.

8.° Enfin on conclut de cette dernière proposition que *les axes radicaux de quatre sphères prises successivement trois à trois, passent tous quatre par un même point*. Ce point est ce qu'on appelle le *centre radical* des quatre sphères. C'est le seul point de l'espace duquel on puisse mener à ces quatre sphères des tangentes de même longueur.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 76 du précédent volume;

Par M. ***

PROBLÈME. *Les propriétés caractéristiques de la sphère sont 1.° que toutes celles de ses cordes qui passent par un certain point fixe y ont leur milieu; 2.° que ces cordes sont toutes d'une même longueur. Les surfaces qui jouissent de la première de ces proprié-*

tés sont les surfaces qui ont un centre, et dont il est facile d'obtenir l'équation générale. On propose de donner également l'équation générale des surfaces qui jouissent de la dernière propriété sans jouir de la première?

Solution. Soient P le point donné et $2r$ la longueur commune que doivent avoir toutes les cordes qui concourront en ce point. Concevons dans l'espace une surface courbe, tout-à-fait arbitraire, continue ou discontinue. De l'un quelconque C des points de cette surface soit menée une droite au point P, et faisons du même point le centre d'une sphère ayant un rayon égal à r, cette sphère sera percée par la droite PC en deux points appartenant à deux nappes de la surface cherchée, laquelle sera continue ou discontinue suivant la nature du lieu des points C.

Imitons ce procédé par l'analise. Soit pris le point P pour origine des coordonnées rectangulaires, et soit alors

$$z=f(x,y)\,, \qquad (1)$$

l'équation de la surface lieu des points C; les équations de l'une quelconque des droites PC seront

$$x=Az\,,\qquad y=Bz\,, \qquad (2)$$

A et B étant deux indéterminées; et, en combinant entre elles les équations (1,2), on en tirera pour le point C des équations de la forme

$$x=A\varphi(A,B)\,,\qquad y=\varphi B(A,B)\,,\qquad z=\varphi(A,B)\,. \quad (3)$$

La sphère qui aura ce point pour centre et un rayon égal à r aura pour équation

$$\{x-A\varphi(A,B)\}^2+\{y-B\varphi(A,B)\}^2+\{z-\varphi(A,B)\}^2=r^2\,. \quad (4)$$

En combinant donc cette dernière équation, pour chaque système de valeurs de A et B, avec les équations (2), on obtiendrait, tour-à-tour, tous les points des deux nappes de la surface cherchée. Pour

obtenir donc l'équation générale de cette surface, il n'est question que d'éliminer A et B entre ces mêmes équations, ce qui donnera

$$\left\{x-\frac{x}{z}\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{h}\right)\right\}^2+\left\{y-\frac{y}{z}\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right\}^2+\left\{z-\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right\}^2=r^2$$

ou bien,

$$(x^2+y^2+z^2)\left\{z-\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right\}^2=r^2z^2, \qquad (5)$$

qui est conséquemment l'équation demandée.

Nous avons supposé que la fonction f était donnée, et nous venons de voir que la fonction φ s'en déduit en résolvant par rapport à z l'équation

$$z=\text{f}(Az,Bz).$$

Si, au contraire, la fonction φ étant donnée, on veut en déduire la fonction f, on y parviendra en résolvant par rapport à la même variable l'équation

$$z=\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right).$$

La question que nous venons de résoudre est exactement, pour la géométrie à trois dimensions, ce qu'est, pour la géométrie plane, celle qui a été traitée par M. Jouvin (*Annales*, tom. I, pag. 124).

Démonstration du théorème d'analise énoncé à la page 164 du précédent volume;

Par un Abonné.

Théorème. *Si, dans une équation de degré quelconque, les coefficiens p, q, r, s de quatre termes consécutifs sont tels que le pro-*

duit $(q^2-pr)(r^2-qs)$ soit nul ou négatif, cette équation aura nécessairement deux racines imaginaires, au moins; et, si une pareille relation a lieu pour plusieurs séries de quatre termes consécutifs, l'équation aura autant de couples de racines imaginaires, au moins qu'elle offrira de pareilles séries.

Démonstration. Il est connu qu'une équation ne saurait avoir plus de *racines positives* que de *variations* de signes, ni plus de *racines négatives* que de *permanences* de signes.

Il suit de là que si, dans une équation, il manque un terme entre deux termes de même signe, cette équation aura deux racines imaginaires, au moins. Soient, en effet, v le nombre de ses variations et p le nombre de ses permanences, de part et d'autre du terme qui manque, m étant le degré de l'équation; on devra avoir $v+p=m-2$. En rétablissant le terme qui manque, avec le coefficient zéro affecté du même signe que portent les deux termes qui le comprennent, ce qui est permis, l'équation n'ayant dès lors que v variations, on sera en droit d'en conclure qu'elle n'a pas plus de v racines réelles positives. Si, au contraire, on rétablit ce même terme, en donnant à son coefficient zéro un signe contraire au signe commun des deux termes qui le comprennent, ce qui est également permis, l'équation n'ayant toujours que p permanences, on sera en droit d'en conclure qu'elle n'a pas plus de p racines réelles négatives. Une telle équation n'a donc au plus que $v+p$ ou $m-2$ racines réelles; elle a donc deux racines imaginaires, au moins.

Le même raisonnement prouve qu'autant de fois il manquera un terme entre deux autres de même signe, autant l'équation aura de couples de racines imaginaires, au moins.

Il suit de là qu'une équation dans laquelle il manque deux termes consécutifs a au moins deux racines imaginaires; car alors on peut toujours rétablir le terme qui manque de manière à faire manquer l'autre entre deux termes de mêmes signes. On voit même qu'autant de fois il manquera deux termes consécutifs, entre deux

termes effectifs, autant l'équation aura de couples de racines imaginaires, au moins.

Il est évident d'ailleurs que l'introduction ou la suppression d'une racine réelle, dans une équation, ne saurait modifier en aucune sorte le nombre de ses racines imaginaires.

Cela posé, soit

$$px^{n+1}+qx^{n}+rx^{n-1}+sx^{n-2}$$

une portion d'une équation de degré quelconque, si on y introduit une racine réelle indéterminée $-A$, en multipliant son premier membre par $x+A$, trois termes consécutifs de l'équation résultante seront

$$(q+pA)x^{n+1}+(r+qA)x^{n}+(s+rA)x^{n-1}.$$

Or, d'après ce qui a été dit plus haut, si l'on peut disposer de A de manière à avoir à la fois

$$q+pA=0, \quad r+qA=0;$$

ou bien

$$r+qA=0, \quad s+rA=0;$$

ce qui exige qu'on ait

$$q^2-pr=0, \quad \text{ou} \quad r^2-qs=0,$$

l'équation aura deux racines imaginaires.

Mais quand bien même aucune de ces deux conditions ne pourrait être remplie, pourvu qu'en déterminant A par la condition

$$r+qA=0, \quad \text{qui donne} \quad A=-\frac{r}{q},$$

il en résulte pour $q+pA$ et $s+rA$ des valeurs de mêmes signes, c'est-à-dire, des valeurs telles qu'on ait

$$(q+pA)(s+rA)>0,$$

l'équation aura également deux racines imaginaires, au moins.

or, en mettant pour A sa valeur dans cette inégalité, on trouve

$$\left(q-\frac{pr}{q}\right)\left(s-\frac{r^2}{q}\right)>0, \quad \text{ou} \quad \left(q-\frac{pr}{q}\right)\left(\frac{r^2}{q}-s\right)<0;$$

ou, en multipliant par q^2

$$(q^2-pr)(r^2-qs)<0,$$

comme l'annonce le théorème.

Il résulte de là, en particulier, qu'autant on rencontre, dans une équation, de séries de trois termes formant une proportion continue par quotiens, autant l'équation a de couples de racines imaginaires au moins (*).

Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 31 du présent volume;

Par M. Vallès, éleve à l'Ecole royale polytechnique.



Les deux problèmes que nous nous proposons ici de résoudre étant de la classe de ceux de la géométrie plane qui ont entre eux la relation qui a fait le sujet de l'article de la page 209 du présent volume; nous allons, comme en cet endroit, en présenter la solution dans deux colonnes correspondantes.

PROBLÈME. Deux systèmes de deux points, situés sur un même plan, déterminant deux droites; que quelque obstacle em-

PROBLÈME. Deux systèmes de deux droites, situés sur un même plan, déterminant deux points que quelque obstacle em-

---

(*) Le théorème qui vient d'être démontré, et beaucoup d'autres du même genre, font le sujet d'un mémoire de M. de Lavernède, dont on trouve l'extrait dans le volume de l'*Académie du Gard*, pour 1809.

J. D. G.

pêche de construire; déterminer, en n'employant que la règle seulement, le point de concours de ces deux droites.

Solution. Soient A, B, les deux points du premier système, et A′, B′, les deux points du second; il s'agit, sans construire les droites AB et A′B′, de construire le point S qu'elles déterminent.

Pour y parvenir, soient construites les droites AA′ et BB′, déterminant un point C″; par A et B, soient menées deux droites de directions arbitraires, concourant en C′, et déterminant avec C″, la droite C′C″. Sur cette droite, soit pris arbitrairement un point C, et soit joint ce point aux points A′, B′ par des droites CA′ et CB′, coupant respectivement AC′ et BC′ en A″ et B″; alors la droite A″B″ contiendra le point cherché S. En répétant donc la même construction, mais en ayant soin de varier ce qu'elle offre d'arbitraire, on obtiendra une nouvelle droite contenant aussi le point S, qui se trouvera ainsi à l'intersection de ces deux droites.

pêche de construire; déterminer, en n'employant que la règle seulement, la droite qui passe par ces deux points?

Solution. Soient A, B, les deux droites du premier système et A′, B′, les deux droites du second; il s'agit, sans construire les points AB et A′B′, de construire la droite S qu'ils déterminent.

Pour y parvenir, soient construits les points AA′ et BB′, déterminant une droite C″; sur A et B, soient pris deux points de situation arbitraire, appartenant à une droite C′, et déterminant, avec C″, le point C′C″. Par ce point, soit menée arbitrairement une droite C, déterminant, sur A′ et B′, les points CA′ et CB′, qui, avec les points AC′ et BC′, détermineront respectivement les droites A″ et B″; alors le point A″B″ de concours de ces deux droites sera l'un de ceux de la droite cherchée S. En répétant donc la même construction, mais en ayant soin de varier ce qu'elle offre d'arbitraire, on obtiendra un nouveau point qui sera aussi sur la direction de S, laquelle se trouvera ainsi assujettie à passer par ces deux points.

On justifie aisément cette construction du problème, en observant qu'il en résulte que les deux triangles dont les sommets sont A, A′, A″ et B, B′, B″ sont tellement situés que les points C, C′, C″ de concours des directions de leurs côtés correspondans A′A″ et B′B″, A″A et B″B, AA′ et BB′, appartiennent tous trois à une même droite; d'où il résulte, en vertu d'une proposition connue (*), que les droites AB, A′B′, A″B″ qui joignent leurs sommets correspondans doivent concourir toutes trois en un même points S.

Il importe de remarquer que, quand bien même on ne pourrait pas construire les droites AA′ et BB′, on n'en parviendrait pas moins à la détermination du point S; puisque, dans le cas où on ne peut pas mener une droite entre deux points, on peut néanmoins (**) construire, avec la règle, tant de points qu'on voudra du prolongement de cette droite.

On justifie aisément cette construction du problème, en observant qu'il en résulte que les deux triangles dont les côtés sont A, A′, A″ et B, B′, B″ sont tellement situés que les droites C, C′, C″ qui joignent leurs sommets correspondans A′A″ et B′B″, A″A et B″B, AA′ et BB′, concourent toutes trois en un même point; d'où il résulte, en vertu d'une proposition connue (*), que les point AB, A′B′, A″B″ de concours des directions de leurs côtés correspondans sont tous trois situés sur une même droite S.

Il importe de remarquer que, quand bien même on ne pourrait pas construire les points AA′ et BB′, on n'en parviendrait pas moins à la détermination de la droite S; puisque, dans le cas où on ne peut pas prolonger deux droites jusqu'à leur point de concours, on peut néanmoins (**) construire, avec la règle, tant de droites qu'on voudra qui concourent en ce point.

(*) Voyez la page 219 du présent volume, n.° 18 de droite.

(*) Voyez la page 219 du présent volume, n.° 17 de gauche.

(**) Voyez la page 220 du présent volume.

Ainsi, étant donnés les quatre sommets d'un quadrilatère, dont aucun des côtés ne peut être tracé, on pourra toujours, avec la règle, construire les deux points que déterminent les directions de ses côtés opposés.

Ainsi, étant données les directions des quatre côtés d'un quadrilatère, dont aucun sommet ne peut être construit, on pourra toujours, avec la règle, construire les deux droites que déterminent ses sommets opposés.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de géométrie.

Si trois tétraèdres sont tellement situés dans l'espace que les plans que déterminent leurs sommets correspondans concourent tous quatre en un même point; les points de concours de leurs faces correspondantes appartiendront tous quatre à un même plan et réciproquement.

Problème de géométrie.

Construire dans l'espace un triangle semblable à un triangle donné, de telle sorte que l'un de ses sommets soit en un point donné et que les deux autres soient sur deux droites données, non situés dans un même plan?

On suppose d'ailleurs qu'on indique à l'avance quel devra être celui des trois sommets du triangle qui devra se trouver au point donné et sur chacune des droites données. Autrement, le problème offrirait six cas.

FIN DU SEIZIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le XVI.e volume des Annales.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème d'algèbre ; par M. *Lenthéric.* 120—121.

Autre démonstration du même théorème ; par M. *Vallès.* 263—265.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Essai sur les limites des racines des équations littérales ; par M. *Bouvier.* 54—61.

Démonstration d'un théorème propre à faire reconnaître la présence des racines imaginaires dans les équations ; par un *Abonné.* 382—385.

ANALISE APPLIQUÉE.

Mémoire sur l'avantage du banquier, au jeu du trente et quarante ; par M. le Baron *Poisson.* 173—209.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Résolution directe et générale de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues ; par M. le comte *Libri.* 297—307.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Réponse aux remarques de M. *Stein*, sur la théorie des exponentiels et des logarithmes ; par M. *Vincent.* 92—96.

Mémoire sur les *intégrales définies*, où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies déjà connues, et celles d'un grand nombre d'autres; par M. *Cauchy* (*Première Partie*) 97—108.

Exposition élémentaire des principes du calcul des variations, par M. *Ampère*. 133—167.

Développement remarquable des racines et des logarithmes; par M. *Bouvier*. 294—296.

Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, du calcul aux différences et de l'interpolation des suites, considérés comme dérivant d'une source commune; par M. *Ampère*. 329—349.

ARITHMÉTIQUE PRATIQUE.

Sur l'erreur que l'emploi des parties proportionnelles peut entraîner, dans les résultats des calculs par logarithmes; par M. *Vincent*. 19—26.

COMBINAISONS.

Mémoire sur l'avantage du banquier, au jeu du trente et quarante; par M. le baron *Poisson*. 173—209.

Démonstration d'une formule d'algèbre, par la théorie des combinaisons; par M. *Vallès*. 263—265.

CORRESPONDANCE.

Lettre sur divers sujets traités dans les *Annales*; par M. *Stein*. 257—263.

GÉOMÉTRIE.

Rapport à l'Académie royale des sciences; par M. *Cauchy*, sur un mémoire de M. *Poncelet*, relatif aux propriétés des centres des moyennes harmoniques. 349—360.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorèmes sur l'hyperboloïde à une nappe, sur la surface conique du

second ordre, et sur l'ellipse et l'hyperbole sphérique; par M. *Magnus*. 33–39.

Mémoire sur les lignes du second ordre; par M. *Sturm* (*Première partie*). 265–294.

Nature et propriétés principales des sections planes de toute surface conique du second ordre; par M. *Gergonne*. 361–373.

Démonstration d'une propriété générale des lignes de contact des surfaces courbes avec les surfaces coniques circonscrites; par M. *Vallès*. 315–322.

Recherche de l'équation générale des surfaces telles que toutes celles de leurs cordes qui passent par un même point détérminé ont une longueur constante; par M.*** 380–382.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes; par M. *Magnus*. 80–92.

Théorèmes sur l'ellipse; par M. *Ferriot*. 373–376.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Méthode graphique pour les tangentes à la spirale conique; par M. *Garbinski*. 167–173.

Simplification de cette méthode; par M. *Vallès*. 376–378.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Inscription et circonscription au cercle d'un triangle dont les trois côtés forment une proportion continue; par M. *Gérono*. 26–30.

Examen de quelques tentatives de théories des parallèles; par M. *Stein*. 45–64.

Théorèmes sur les polygones; par M. *Gérono*. 61–64.

Solution de deux problèmes de géométrie; par M. *Durrande*. 112–117.

Solution d'un problème de *minimum*; par un *Abonné*. 117–120.

Démonstration d'un théorème sur les polygones; par M. *Lenthéric*. 120–132.

Considérations philosophiques sur la nature et les propriétés de l'étendue; par M. *Gergonne*. 209–232.

Tentatives sur la théorie des parallèles; par M. *Servois* 233–238.

Sur l'usage des projections stéréographiques dans la géométrie; par M. *Dandelin*. 322–327.

Note sur les plans, axes et centres radicaux; par M. *Sarrus.* 378—380.

Solution de deux problèmes de géométrie, par M. *Vallès.* 385—388.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

Considérations philosophiques sur la nature des problèmes qui dépendent de la géométrie de la règle; par M. *Gergonne.* 209—232.

Construction, avec la règle seulement, du point de concours des deux diagonales d'un quadrilatère dont on ne peut construire les sommets, et de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère, lorsque ces côtés ne peuvent être tracés; par M. *Vallès.* 385—388.

GÉOMÉTRIE DES SURFACES COURBES.

Théorèmes sur l'hyperboloïde à une nappe et sur la surface conique du seconde ordre, par M. *Magnus.* 33—39.

Démonstration d'une propriété générale des lignes de contact des surfaces courbes avec les surfaces coniques circonscrits; par M. *Vallès.* 315—322.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes, par M. *Magnus.* 80—92.

OPTIQUE.

Recherches d'analise sur les surfaces caustiques; par M. *Gergonne.* 1—19.

Solution de divers problèmes d'optique; par M. *Gergonne.* 69—80.

Recherche d'analise sur les caustiques planes; par M. *Sturm.* 338—247.

Formules d'optique à trois dimensions; par M. *Gergonne.* 247—254.

Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques, et résumé historique de cette recherche; par M. *Gergonne.* 307—315.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Considérations philosophiques sur les propriétés de l'étendue qui ne dé-

pendent pas des relations métriques; par M. *Gergonne.* 209—232.

STATIQUE.

Démonstration d'un théorème de Statique; par MM. *Lenthéric*, *Sarrus*, *Morel* et *Querret.* 30—32.

TRIGONOMÉTRIE.

Recherches sur les sommes de puissances semblables des sinus et cosinus des divisions de la circonférence en parties égales; par M. *Lenthéric.* 39—45.

Note sur le problème de la trisection de l'angle; par M. *Querret.* 108—112.

Note sur le développement des puissances du cosinus d'un arc en cosinus de ses multiples; par un *Abonné.* 254—257.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tom. XV, pag. 272,	Théorème, résolu tom. XVI,		pag. 30—32
Pag. 244,	Théorème :		120—132
Pag. 368	Problème I.		——
	Problème II.		——
	Problème III.		117—120
Pag. 396	Théorème.		226—228
Tom. XVI, p. 32	Problème I.		——
	Problèmes II et III.		385—388
	Théorème.		——
Pag. 64	Théorème I.	120—121,	263—265
	Théorème II.		121—132

ERRATA

Pour le seizième volume des Annales.

PAGE 5, ligne 8, premier mot — es *lisez* : les.

Pag. 7, pour toute la page, — *les* X, Y, Z, S, S', *doivent être italiques.*

Page 10, ligne 8, S=o, S'=o ; *lisez*: $S=o$, $S'=o$.

ligne 9, — $q'(c-c'$; *lisez* : $q'(c-c')$.

Page 14, ligne 8, du rayon ; *lisez* : d'un rayon.

Page 98, ligne 12, des $\sqrt{-1}$; *lisez* : de $\sqrt{-1}$.

Page 102, lignes 3 et 7, — *apres* (1), *ajoutez*: page 100.

Ligne 8, — *après* (2) ; *ajoutez*: page 101.

Page 104, ligne 8, en remontant — *apres* (3) ; *ajoutez*: page 98.

Pag. 105, ligne 3, formule (12) — $\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f}(x)}$; *lisez*: $\frac{1}{\mathrm{f}(x)}$.

Formule (15) — *changez les mots* Sin. *en* Lim.

Formule (16) — *même changement.*

Page 106, ligne 3, — *la formule doit être numérotée* (19).

Page 107, formule (24) — f_1 ; *lisez* : f_1.

Même formule — Sin. ; *lisez*: Lim.

Bas de la page — *la formule doit être numérotée* (27).

Même formule — F ; *lisez* : π.

Page 108, ligne 14, — *après* (3) ; *ajoutez*: page 98.

Ligne 16, — la formule (3) ; *lisez* : cette formule.

Page 195, ligne 10, — dZ ; *lisez* : dZ_1.

Page 216, après les numéros 7 — *introduisez ce qui suit* :

8. Quatre plans, issus d'un même point de l'espace, déterminent six droites, distribuées trois à trois sur ces quatre plans. Ces six droites déterminent trois nouveaux plans qui, à leur

8. Quatre points, situés dans un même plan, déterminent six droites, concourant trois à trois en ces quatre points. Ces six droites déterminent trois nouveaux points qui, à

tour, déterminent trois nouvelles droites. leur tour, déterminent trois nouvelles droites.

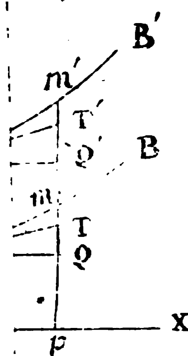
Page 245, ligne 14, — Ang. R, d') ; *lisez* : Ang. (R, d').

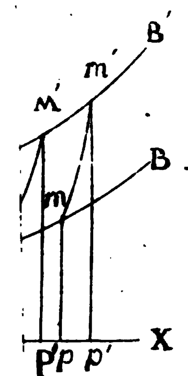
Page 250, formule (4), numérateur du 1.er membre, — t ; *lisez* : t.

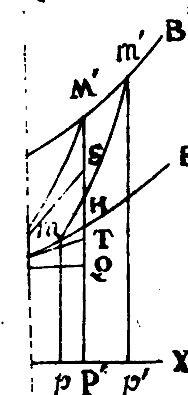
Page 257, lignes 15 et 16, — dont elle s'y trouve ; *lisez* : dont elle y est.

Page 306, ligne 2, en remontant, — $x=c$; *lisez* : $u=c$.

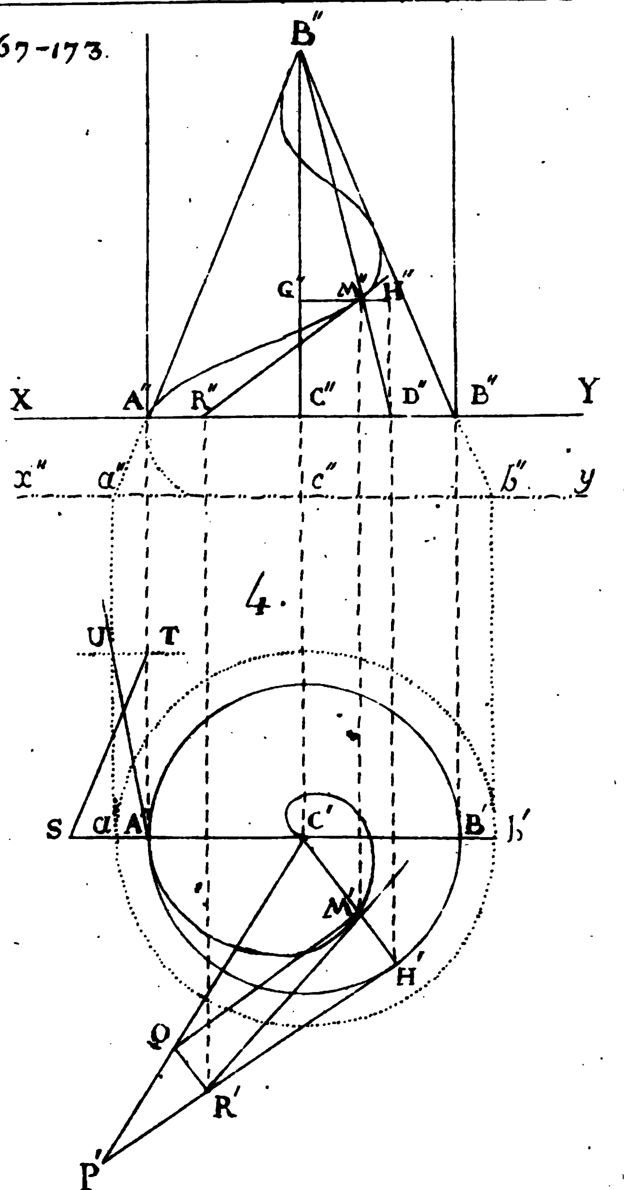
-167.



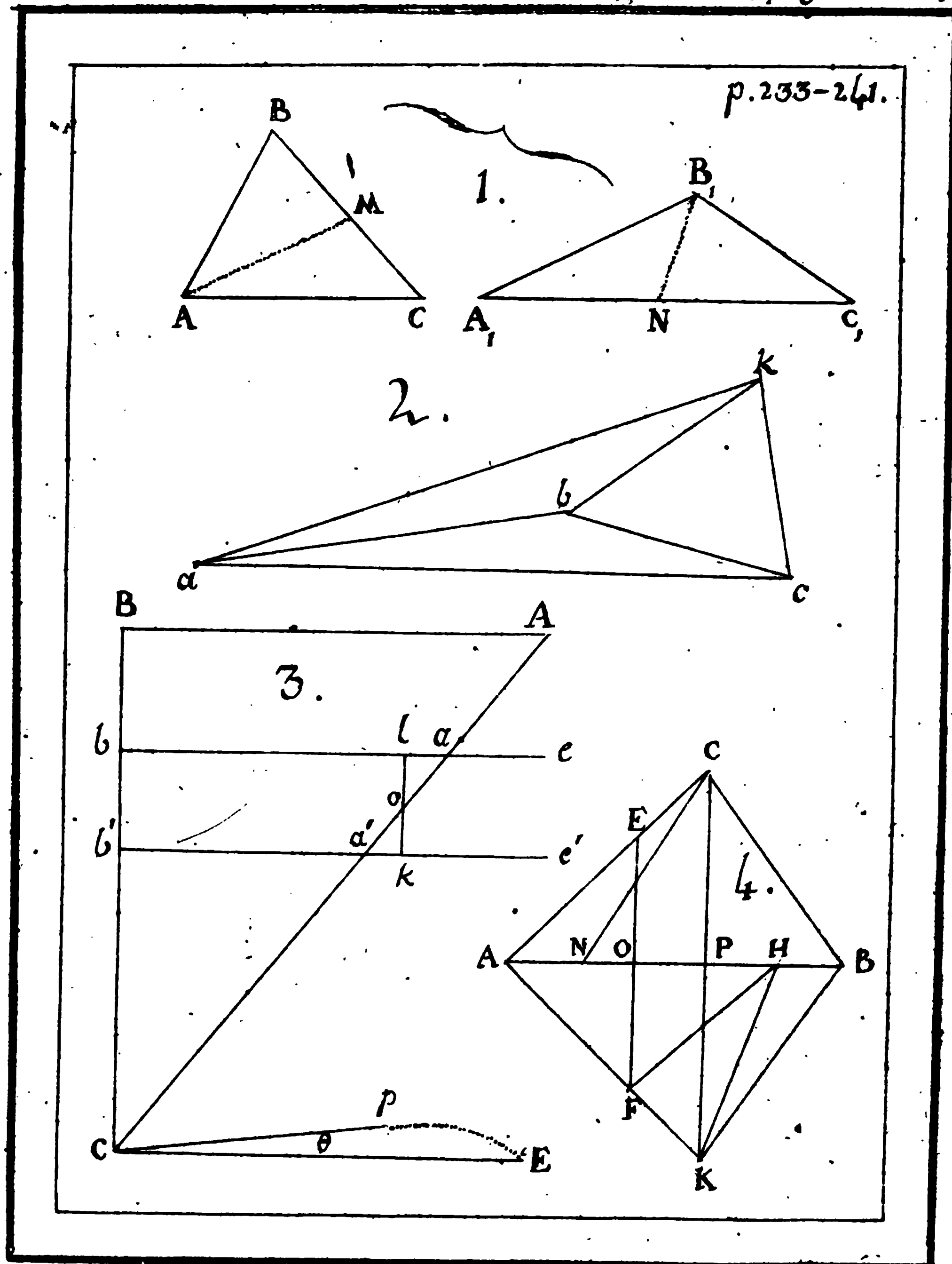




p. 167-173.



J. D. G. fecit.


p. 233-241.
B
M
A
C
1.
B₁
A₁
N
C₁
2.
k
b
a
c
B
A
3.
b
l
a
e
o
b'
a'
e'
k
p
θ
C
E
C
E
4.
A
N
O
P
H
B
F
K

J. D. G. fecit.

